

## GeoGebra segítségével bizonyított feladatok

### V. osztály

### II. félév



**A Digitaliada programban résztvevő iskolák matematika tanárai által összeállított kiadvány, koordinálta Adina Roșca Oktatási Szakértő**

A jelen dolgozatban olyan szövegek és illusztrációk találhatóak, amelyeket az Orange Alapítvány szerzői joga véd, az AttributionNonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0) feltételeinek megfelelően. Ezeket a <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/> címen találhatjuk meg. Az itt megjelenő illusztrációk a javasolt alkalmazások képernyőmásolatai. A borító, az illusztrációk, bejegyzett védjegyek, az Orange Alapítvány és Digitaliada logók, valamint minden más, a borítón megjelenő márkaelem szerzői jogok által védett és nem használható a jogos tulajdonos előzetes beleegyezése nélkül.

## Tartalomjegyzék

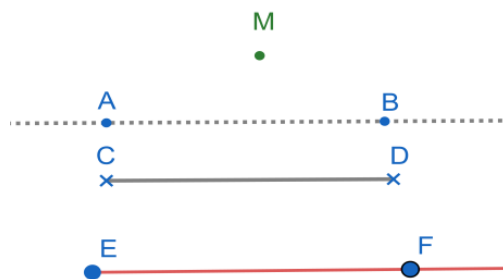
<b>MÉRTANI ELEMÉK</b> .....	2
Pont, egyenes, sík, félsík, félegyenes, szakasz .....	2
Pont és egyenes kölcsönös helyzetei. Kollineáris pontok. Két egyenes kölcsönös helyzete: metsző egyenesek, párhuzamos egyenesek	4
Két pont közötti távolság. Szakasz hossza. Kongruens szakaszok.....	6
Szakasz középpontja. Egy pontnak adott pont szerinti szimmetrikusa.....	7
<b>SZÖGEK</b> .....	9
Szög: értelmezés, jelölések, a szög elemei. Egy szög belső és külső tartománya .....	9
Kongruens alakzatok. Szimmetriatengely .....	11
<b>KÖNYVÉSZET</b> .....	13

## MÉRTANI ELEMEEK

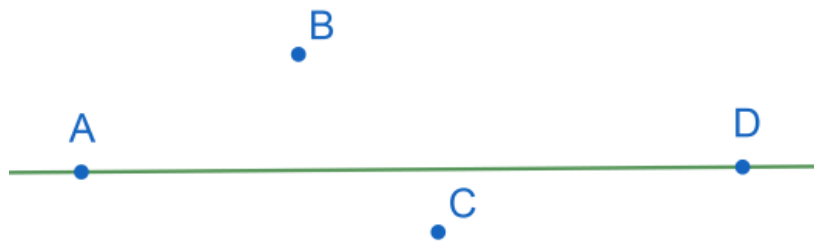
### Pont, egyenes, sík, félsík, félegyenes, szakasz

1. Készítsétek el az alábbi utasításoknak megfelelő ábrákat:

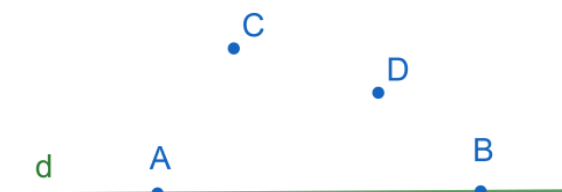
- $M$  egy pont, amelynek színe zöld
- $AB$  egy egyenes, amelynek vonal stílusa pontozott
- $[CD]$  egy olyan szakasz amely végpontjainak stílusa "x"
- $[EF]$  egy piros színű félegyenes, amely  $E$  és  $F$  végpontjainak mérete 5



2. Rajzoljátok meg az  $A, B, C$  és  $D$  különböző pontokat, úgy, hogy a  $B$  és  $C$  pontok az  $AD$  egyenes két különböző oldalán helyezkedjenek el.

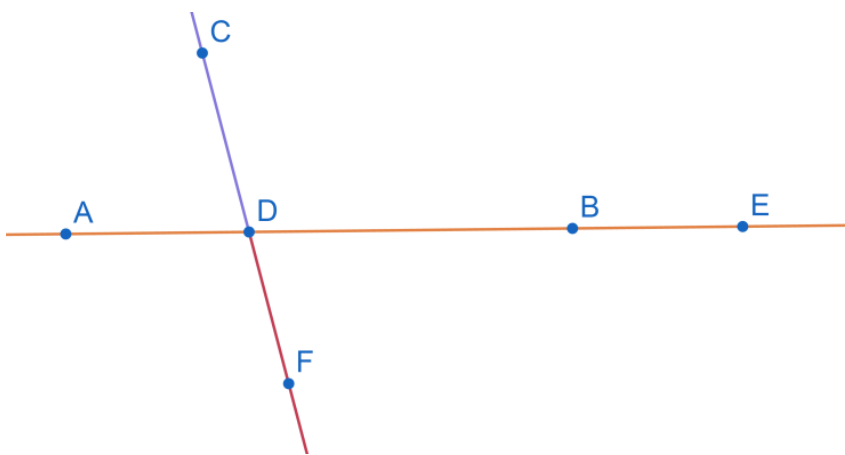


3. Legyen  $A, B, C$  és  $D$  négy különböző pont, és  $d$  egy egyenes. Készítsetek ábrát, úgy, hogy az alábbi kijelentés igaz legyen:  $AB = d$  és a  $C$  pont a  $(d, D)$  félsíkban helyezkedik el.



## II. FÉLÉV

4. Legyen  $AB$  egy egyenes és  $C$  egy rajta kívül fekvő pont.
- Vegyünk fel egy  $D$  pontot, úgy, hogy a  $\sphericalangle DA$  és  $\sphericalangle DB$  ellentétes félegyenesek legyenek
  - Vegyünk fel egy  $E$  pontot, úgy, hogy  $\sphericalangle EB$  és  $\sphericalangle EA$  azonos, míg  $\sphericalangle BD$  és  $\sphericalangle BE$  ellentétes félegyenesek legyenek
  - Szerkesszék meg az  $\sphericalangle DF$  félegyenes  $\sphericalangle DC$  ellentett félegyenesét



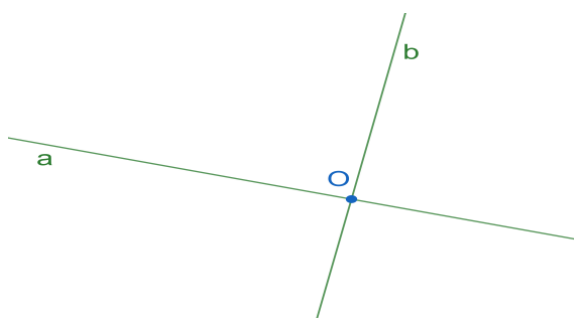
## Pont és egyenes kölcsönös helyzetei. Kollineáris pontok. Két egyenes kölcsönös helyzete: metsző egyenesek, párhuzamos egyenesek

1. Rajzoljatok egy  $d$  egyenest, majd vegyétek fel rajta egy  $M$  és rajta kívül egy  $N$  pontot.

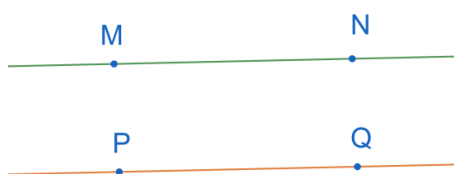


2.  
 a) Rajzoljátok meg az  $a$  és  $b$  metsző egyeneseket, majd metszéspontjukat jelöljétek  $O$ -val.  
 b) Rajzoljátok meg az  $MN$  és  $PQ$  párhuzamos egyeneseket

a)



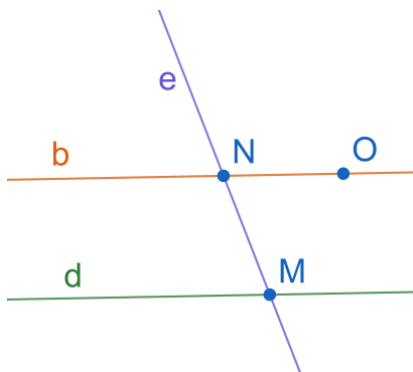
b)



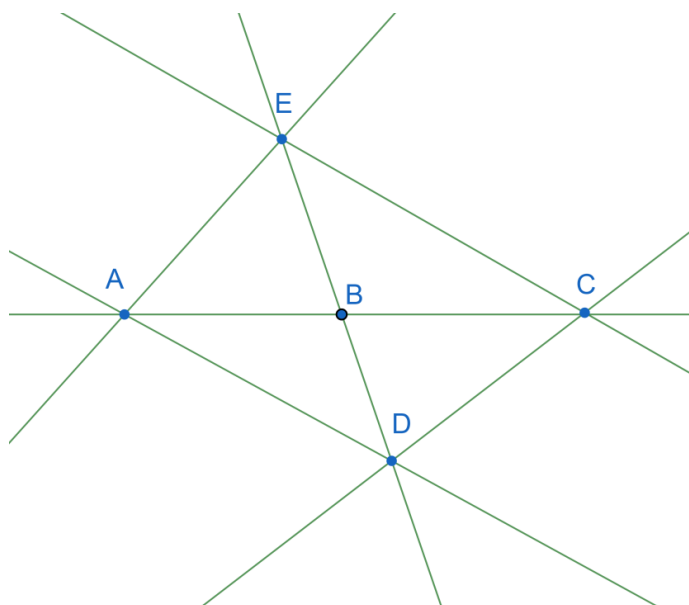
## GeoGebra segítségével bizonyított feladatok – V. osztály

### II. FÉLÉV

3. Rajzoljatok egy  $d$  egyenest, és egy rajta kívül fekvő  $O$  pontot. Szerkesszük meg az  $O$  ponton áthaladó, és a  $d$  egyenessel párhuzamos  $b$  egyenest, valamint azt az  $e$  egyenest amely az  $d$  és  $b$  egyeneseket rendre az  $M$  és  $N$  pontokban metszi.

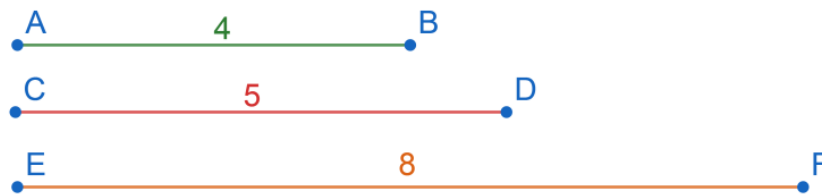


4. Vegyük fel az  $A, B, C, D$  és  $E$  pontokat úgy, hogy  $A, B, C$  kollineárisak,  $B, D, E$  szintén kollineárisak, de  $A, B$  és  $D$  nem kollineáris pontok.
- Készítsetek ábrát!
  - Hány egyenest határoz meg a fenti öt pont?



## Két pont közötti távolság. Szakasz hossza. Kongruens szakaszok

1. Szerkesszék meg a következő szakaszokat:  $AB=4\text{ cm}$ ,  $CD=5\text{ cm}$  és  $EF=8\text{ cm}$ .



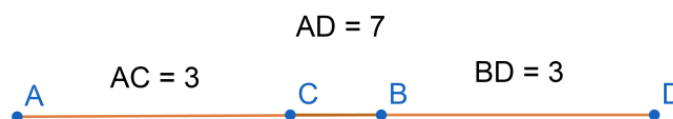
2. Egy  $d$  egyenesen vegyük fel az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontokat úgy, hogy  $AB=3\text{ cm}$  és  $AC=5\text{ cm}$ . Számítsátok ki az  $[BC]$  szakasz hosszát.



3. Egy  $d$  egyenesen ábrázold az  $A$ ,  $D$ ,  $C$  és  $B$ , ebben a sorrendben megadott pontokat, úgy, hogy  $AD=2\text{ cm}$  és  $DC=4\text{ cm}$ . Tudva, hogy  $[CB] \cong [AD]$ , számítsátok ki az  $[AB]$  szakasz hosszát.

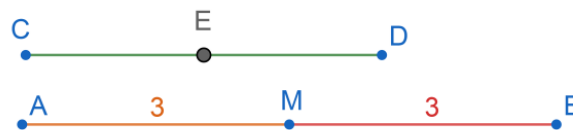


4. Szerkesszék meg, az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  pontokat, úgy, hogy a  $C$  az  $[AB]$  szakasz, míg a  $B$  a  $[CD]$  szakasz egy pontja legyen. Ha  $AB=4\text{ cm}$ ,  $CB=1\text{ cm}$  és  $CD=4\text{ cm}$ , számítsátok ki az  $[AC]$ ,  $[BD]$  és  $[AD]$  szakaszok hosszát.

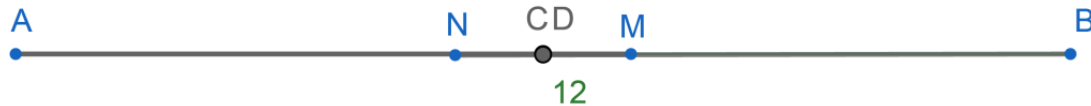


## Szakasz középpontja. Egy pontnak adott pont szerinti szimmetrikusa

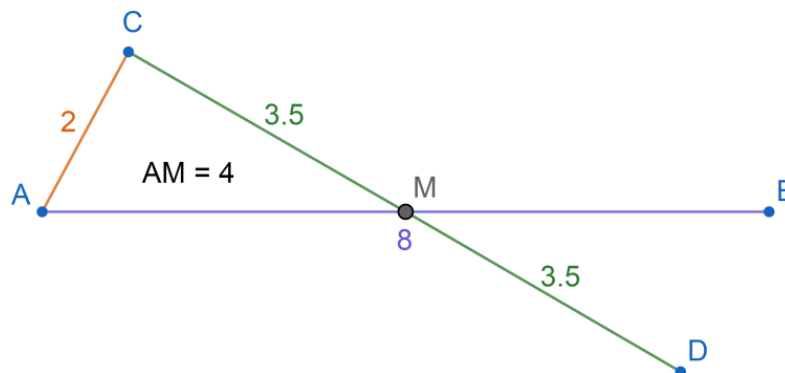
1.
  - a. Szerkesszék meg a  $CD=4\text{ cm}$  hosszúságú szakaszt és jelöljük  $E$ -vel a középpontját.
  - b. Szerkesszék meg az  $AM=3\text{ cm}$  hosszúságú szakaszt, majd jelöljük  $B$ -vel az  $A$  pont  $M$  pont szerinti szimmetrikusát.



2. Szerkesszék meg az  $AB=12\text{ cm}$  hosszúságú szakaszt. Vegyük fel az  $[AB]$  szakasz két  $M$  és  $N$  pontját, úgy, hogy  $AM=BN=7\text{ cm}$ . Mutassátok ki, hogy az  $[AB]$  és  $[MN]$  szakaszoknak ugyanaz a felezőpontja



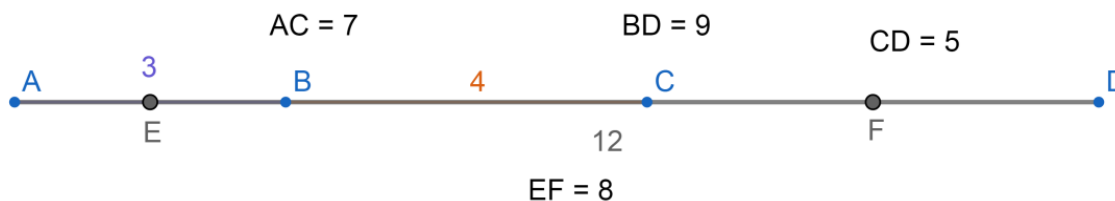
3. Jelölje  $M$  az  $AB=8\text{ cm}$  hosszúságú szakasz felezőpontját.
  - a) Igazoljátok, hogy  $AM=4\text{ cm}$ .
  - b) Az  $AB$  egyenes által meghatározott egyik félsíkban vegyétek fel a  $C$  pontot, úgy, hogy  $AC=2\text{ cm}$ , majd szerkesszék meg a  $C$  pontnak az  $[AB]$  szakasz felezőpontja szerinti szimmetrikusát.



## GeoGebra segítségével bizonyított feladatok – V. osztály

### II. FÉLÉV

4. Legyen  $A, B, C$  és  $D$  négy, ebben a sorrendben megadott kollineáris pont. Tudva, hogy  $AB=3\text{ cm}$ ,  $BC=4\text{ cm}$  és  $AD=12\text{ cm}$ , számítsátok ki az  $[AC]$ ,  $[BD]$  és  $[CD]$  szakaszok hosszát. Ha  $E$  az  $[AB]$  és  $F$  a  $[CD]$  szakaszok felezőpontját jelöli, határozzátok meg az  $[EF]$  szakasz hosszát.



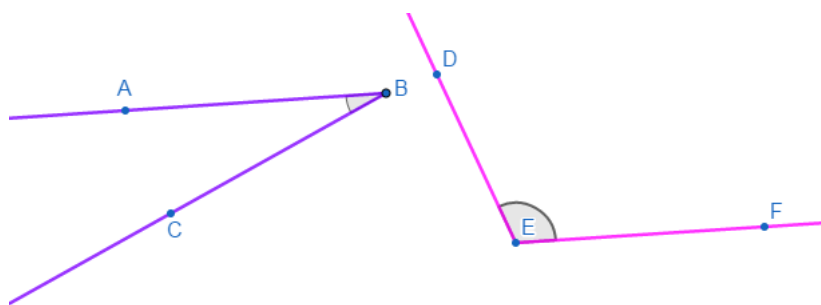
## SZÖGEK

**Szög: értelmezés, jelölések, a szög elemei. Egy szög belső és külső tartománya**

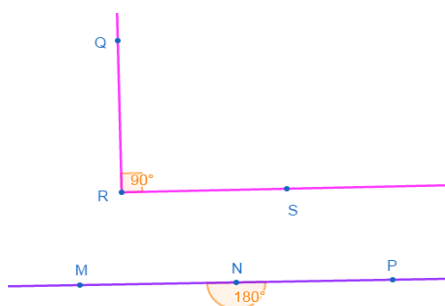
1. Szerkesszék meg:

- az  $ABC$  hegyesszöget és a  $DEF$  tompaszöget
- a  $QRS$  derékszöget és az  $MNP$  egyenesszöget

a)



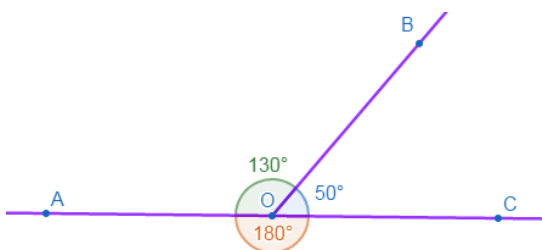
b)



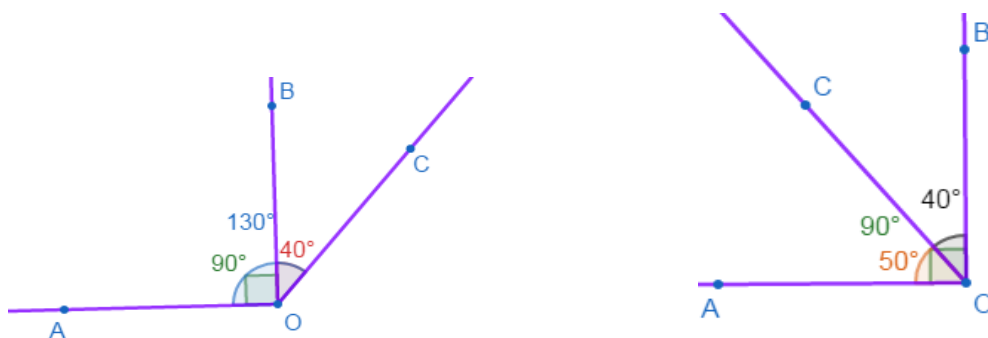
- Szerkesszék meg az  $AOB$  és  $BOC$  szögeket, úgy, hogy az  $A$  és  $C$  pontok az  $[OB$  félegyenes két különböző oldalán helyezkedjenek el és  $m(\angle AOB) = 130^\circ$  valamint  $m(\angle BOC) = 50^\circ$ . Mutassátok ki, hogy az  $A$ ,  $O$  és  $C$  pontok kollineárisak.

## GeoGebra segítségével bizonyított feladatok – V. osztály

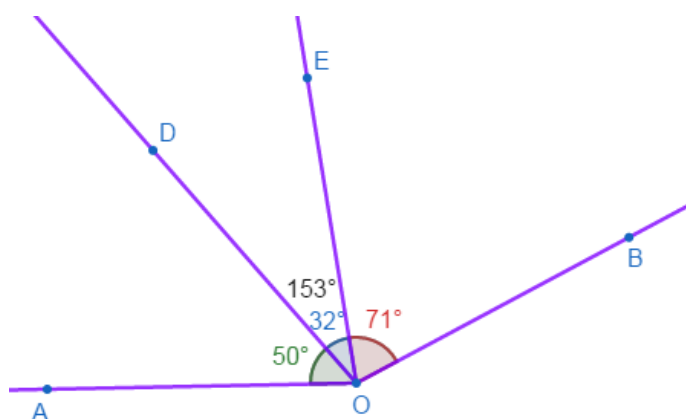
### II. FÉLÉV



3. Szerkesszék meg az  $\sphericalangle AOB$  és  $\sphericalangle BOC$  szögeket, úgy, hogy  $m(\sphericalangle AOB) = 90^\circ$  és  $m(\sphericalangle BOC) = 40^\circ$ . Határozzátok meg az  $\sphericalangle AOC$  mértékét.

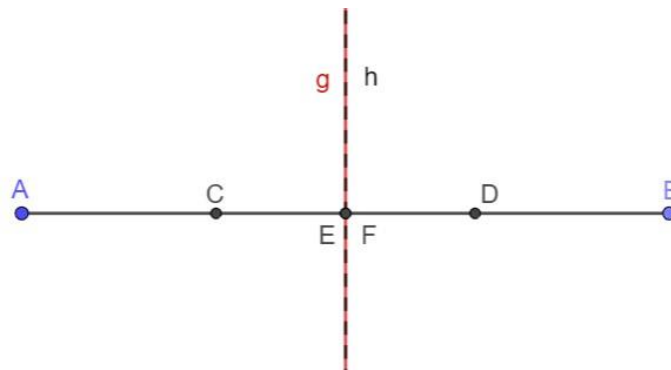


4. Adott a  $m(\sphericalangle AOB) = 153^\circ$  mértékű szög. A belső tartományában felvesszük az  $[OD$  és  $[OE$  félegyeneseket, úgy, hogy  $m(\sphericalangle AOD) = 50^\circ$  és  $m(\sphericalangle EOB) = 71^\circ$ . Határozzátok meg a  $\sphericalangle DOE$  szög mértékét.

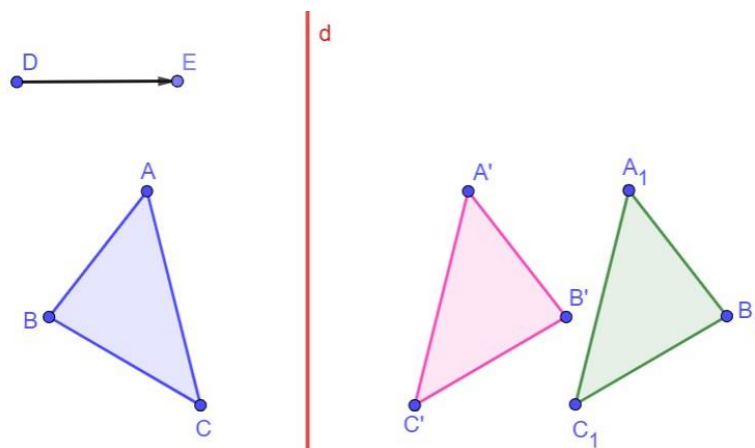


## Kongruens alakzatok. Szimmetriatengely

- Szerkesszék meg az  $[AB]$ ,  $10\text{ cm}$  hosszúságú szakaszt. Legyen  $C$  és  $D$  az  $[AB]$  szakasz két olyan pontja, amelyre  $AC=BD=3\text{ cm}$ . Mutassátok ki, hogy az  $[AB]$  és  $[CD]$  szakaszoknak ugyanaz a szimmetriatengelye.

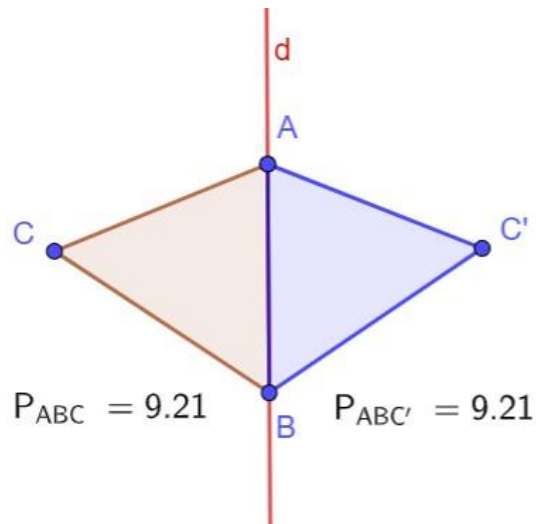


- Szerkesszék meg az  $ABC$  háromszöget.
  - A háromszögen kívül, vegyetek fel egy  $d$  egyenest, majd szerkesszék meg az  $ABC$  háromszög  $d$  egyenes szerinti  $A'B'C'$  szimmetrikusát.
  - Rajzoljatok egy  $3\text{ cm}$  hosszúságú vektort. Ezen vektor segítségével szerkesszék meg az  $A'B'C'$  háromszög eltolási képét, amelyet jelöljetez  $A_1B_1C_1$ -el.

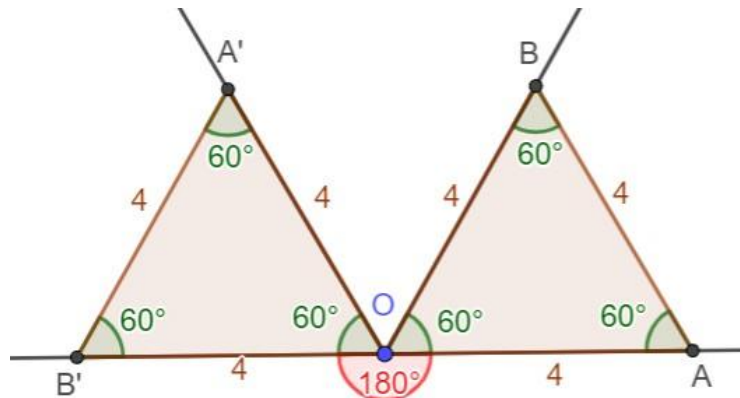


- A  $d$  egyenesen vegyük fel az  $A$  és  $B$  pontokat, rajta kívül pedig egy  $C$  pontot. Ha  $C'$  a  $C$  pont  $d$  egyenes szerinti szimmetrikusa, mutassátok ki, hogy az  $ABC$  és az  $A'B'C'$  háromszögek kerületei egyenlők.

## II. FÉLÉV



4. Jelölje O egy  $60^\circ$ -os szög csúcsát. A szög szárain vegyük fel az A és B pontokat, úgy, hogy  $OA=OB=4$  cm. Jelölje A' az A pont OB egyenes szerinti szimmetrikusát, és B' a B pont OA' egyenes szerinti szimmetrikusát. Szerkesszük meg az AOB és A'OB' háromszögeket, majd
- határozzátok meg a háromszögek oldalainak hosszúságát. Mit figyeltek meg?
  - határozzátok meg a háromszögek szögeinek mértékét. Mit figyeltek meg?
  - mutassátok ki, hogy az A, O és B' pontok kollineárisak.



## KÖNYVÉSZET

1. Perianu, M., Stănică, C., Smărăndoiu, Ș. *Matematică, clasa a V-a* Editura ART Educațional, București, 2018.
2. Zaharia, D., Zaharia, M., Peligrad, P., *Matematică, clasa a V-a*, Editura Paralela 45, București, 2019.