GeoGebra segítségével bizonyított feladatok

VI. osztály

I. félév

A Digitaliada programban résztvevő iskolák matematika tanárai által összeállított kiadvány, koordinálta Adina Roșca Oktatási Szakértő

Digitaliada

Fundația orange

GeoGebra segítségével bizonyított feladatok – VI. osztály

I. FÉLÉV

Tartalomjegyzék

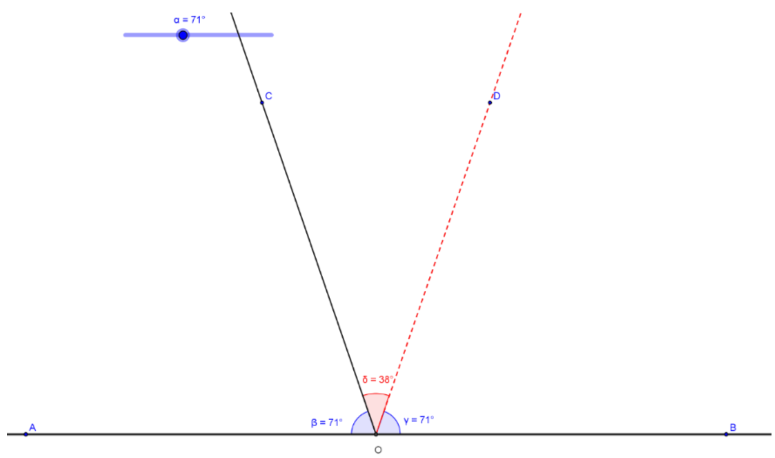
A Digitaliada program keretén belül összeállított kiadvány.

SZÖGEK

Pótszögek, kiegészítő szögek

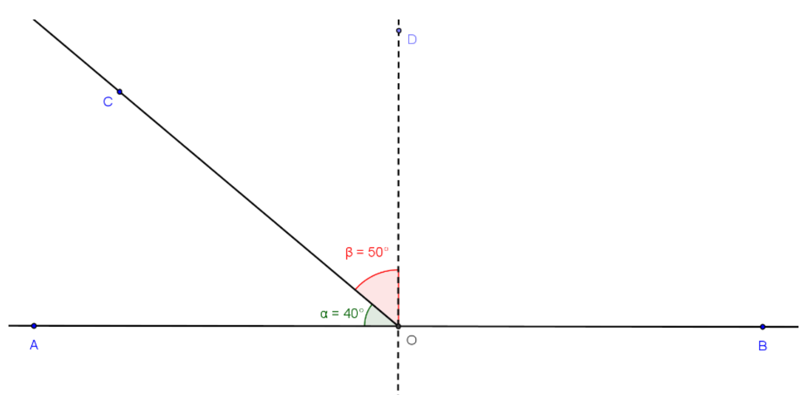
1. Két kiegészítő szög mértékeinek különbsége 38. határozzátok meg a szögek mértékét.

Ábra



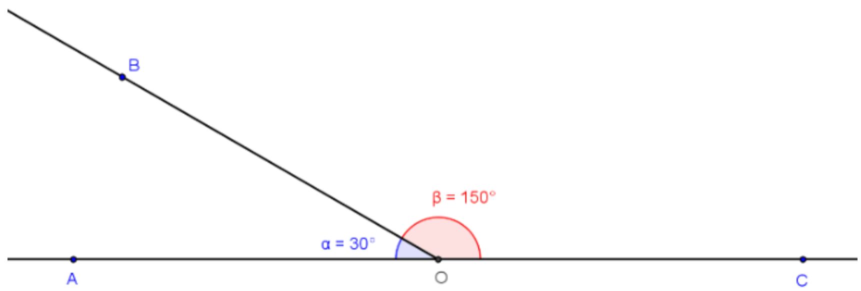
2. Egy szög kiegészítő és pótszöge közötti különbség $40°$. Határozzuk meg a szög mértékét!

Ábra:



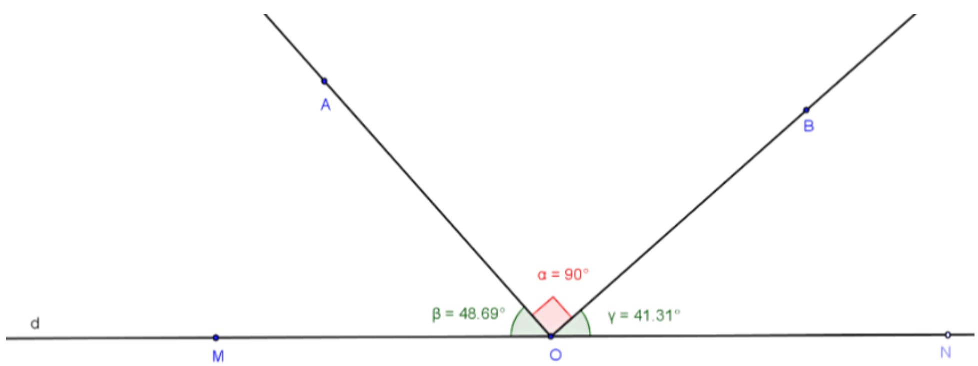
3. Határozzátok meg két kiegészítő szög mértékét, tudva, hogy az egyik szög mértéke ötször nagyobb a másik szög mértékénél.

Ábra:



4. Az $\widehat{AOB}$ derékszög O csúcsán keresztül szerkesszünk egy d egyenest, úgy, hogy az A és B pontok az egyenes ugyanazon oldalán helyezkedjenek el. Legyen M és N a d egyenes két olyan pontja, amelyre $O \in (MN)$, valamint az A és M pontok az OB egyenes azonos oldalán helyezkednek el. Igazoljátok, hogy az $\widehat{AOM}$ és $\widehat{BON}$ pótszögek.

Ábra:

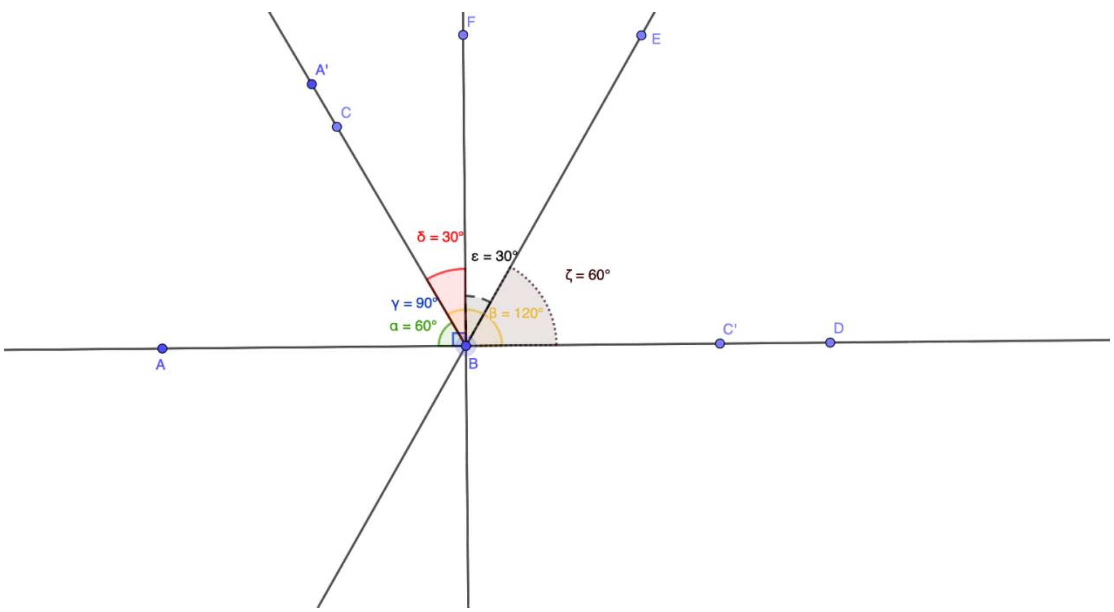


$$m\left(\widehat{AOM}\right) + m\left(\widehat{BON}\right) = 48.69^\circ + 41.31^\circ = 90^\circ$$

Egymás melletti szögek. Egy szög szögfelezője

1. Az $\sphericalangle ABC$ és $\sphericalangle CBD$ szögek egymás melletti kiegészítő szögek. Legyen $[BE$ a $\sphericalangle CBD$, $[BF$ pedig a $\sphericalangle CBE$ szög szögfelezője, úgy, hogy $AB \perp BF$. Mutassátok ki, hogy $m(\sphericalangle ABC) = 60°$.

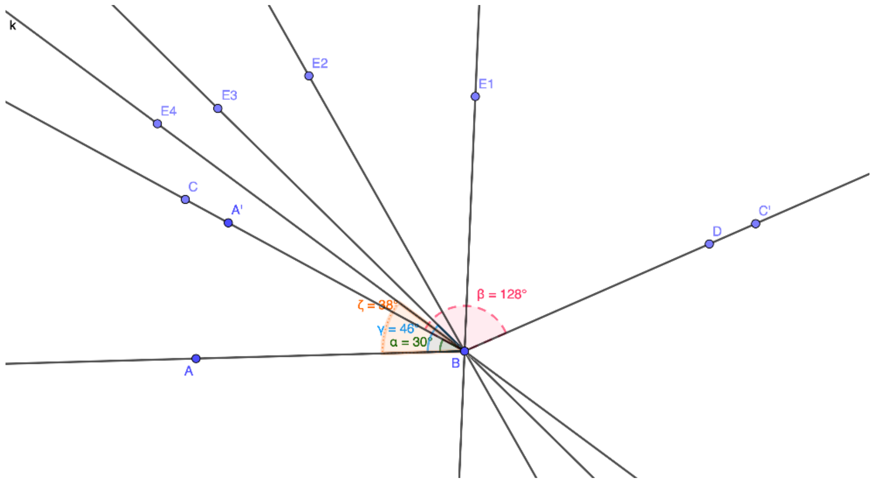
Ábra:



2. Az $\sphericalangle ABC$ és $\sphericalangle CBD$ két olyan egymás melletti szög amelyeknek mértéke $30°$ és $128°$. Legyen $[BE_1$ a $\sphericalangle CBD$ szög, $[BE_2$ a $\sphericalangle CBE_1$ szög, $[BE_3$ a $\sphericalangle CBE_2$ szög szögfelezője és így tovább. Határozzátok meg az n természetes szám legnagyobb érékét amelyre $m\sphericalangle(ABE_n) > 40°$.

Ábra:

I. FÉLÉV



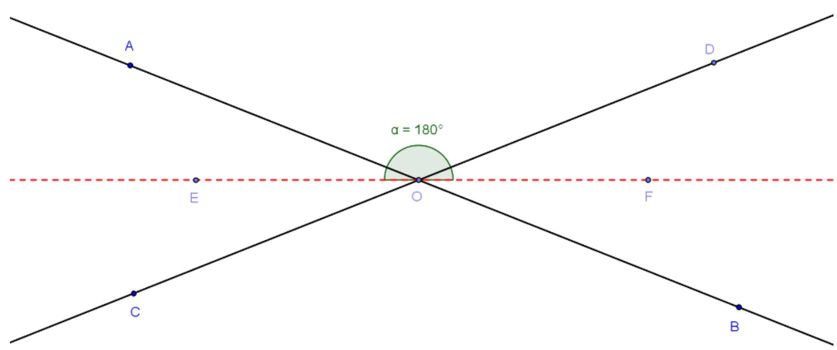
GeoGebra segítségével bizonyított feladatok – VI. osztály

I. FÉLÉV

Csúcsszögek. Pont körüli szögek

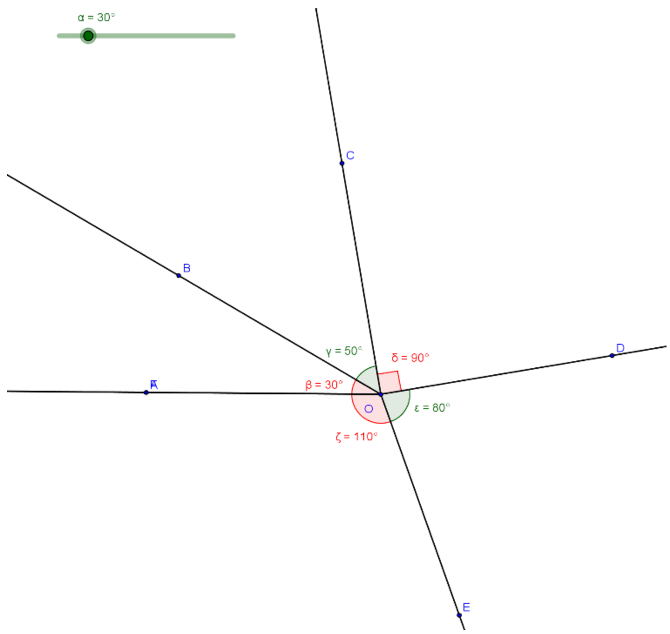
1. Igazoljátok, hogy két csúcsszög szögfelezői ellentétes félegyenesek.

Ábra:



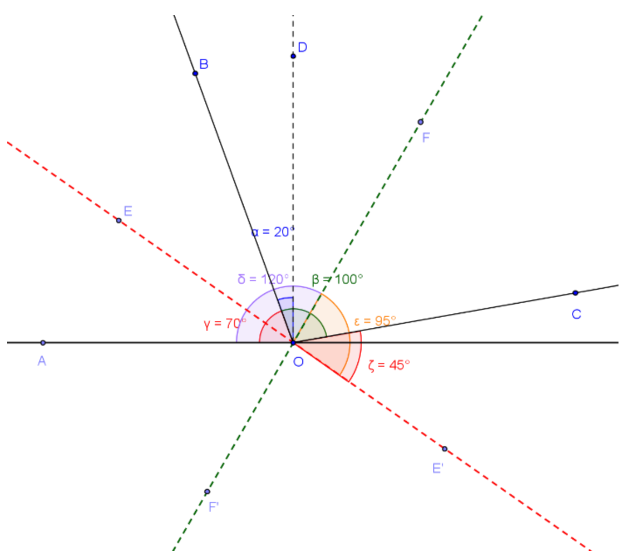
2. Legye öt, egy pont körüli szög, amelyeknek mértékei rendre $\alpha, 2\alpha - 10°, 2\alpha + 30°, 3\alpha - 10°, 4\alpha - 10°$. Határozzátok meg a szögek mértékeit.

Ábra:



3. Legyen $A\hat{O}B$ és $B\hat{O}C$ két egymás melletti szög. Ha az $A\hat{O}B$ szög pótszöge $20°$, $m(B\hat{O}C) = 100°$, $[OE$ az $A\hat{O}B$ szög szögfelezője és $[OE'$ ennek ellentett félegyenese, $[OF$ a $C\hat{O}B$ szög szögfelezője és $[OF'$ ennek ellentett félegyenese, határozzátok meg az $A\hat{O}B$, $A\hat{O}F$, $F\hat{O}E'$ és $C\hat{O}E'$ szögek mértékét.

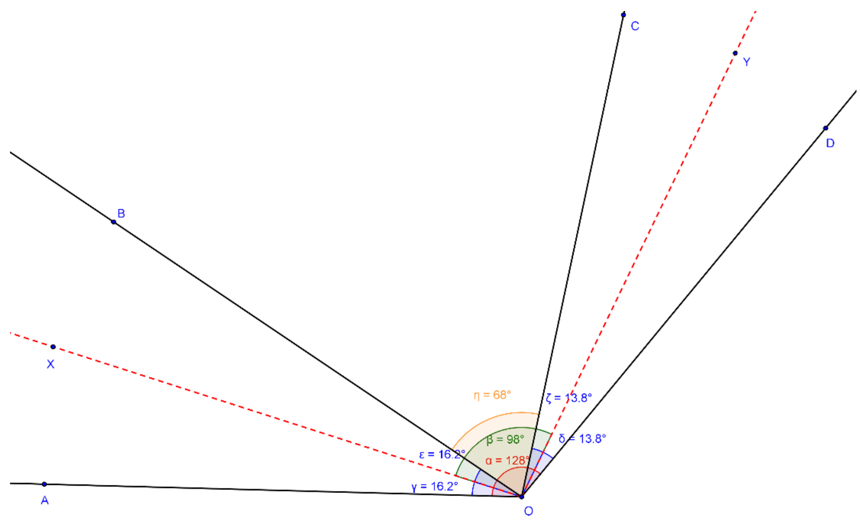
Ábra:



I. FÉLÉV

4. Szerkesszük meg a $m(A\hat{O}D) = 128°$ és $m(X\hat{O}Y) = 98°$ szögeket, úgy, hogy $[OB \subset int(A\hat{O}D)$, $[OC \subset int(B\hat{O}D)$, $[OX$ az $A\hat{O}B$, és $[OY$ a $C\hat{O}D$ szög szögfelezője. Határozzátok meg a $B\hat{O}C$ szög mértékét.

Ábra:



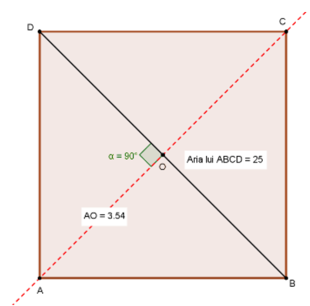
I. FÉLÉV

MERŐLEGESSÉG

Merőleges Egyenesek síkban. Ferdék. Egy pont távolsága egyenestől

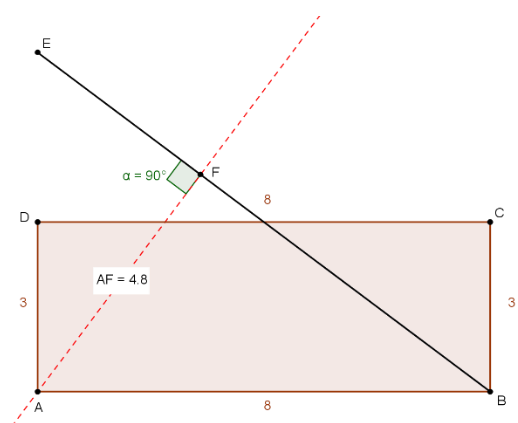
1. Szerkesszetek meg azt az ABCD négyzetet amelynek területe 25 cm^2, majd határozzátok meg az A pont BD egyenestől mért távolságát.

Ábra:



2. Szerkeszd meg azt az ABCD téglalapot, amelynek méretei AB=8 cm és BC=3 cm. HA E az A pont D pont szerinti szimmetrikusa, határozzátok meg az A pont BE egyenestől mért távolságát.

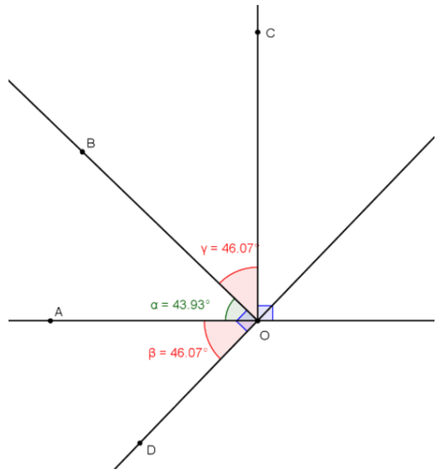
Ábra:



3. Legyen $A\hat{O}B$ és $B\hat{O}C$ két egymás melletti pótszög. Az OC egyenes és az A pont által meghatározott félsíkban megszerkesztjük az OD félegyenest, úgy, hogy $OD \perp OB$. Mutassátok ki, hogy $A\hat{O}D \equiv B\hat{O}C$.

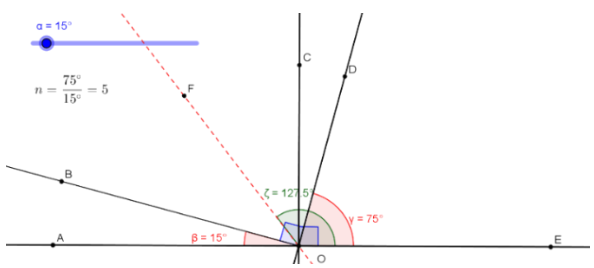
Ábra:

I. FÉLÉV



4. Az $A\hat{O}B$ hegyesszög OA szárának megszerkesztjük az [OE ellentett félegyenesét. Az OB egyenes ugyanazon oldalán megszerkesztjük az $OC \perp OA$ és $OD \perp OB$ merőlegeseket. Tudva, hogy $m\left(D\hat{O}E\right) = 5 \cdot m\left(A\hat{O}B\right)$, számítsuk ki a $D\hat{O}E$ és $E\hat{O}F$ szögek mértékét, ahól (OF az $A\hat{O}D$ szög szögfelezője.

Ábra:

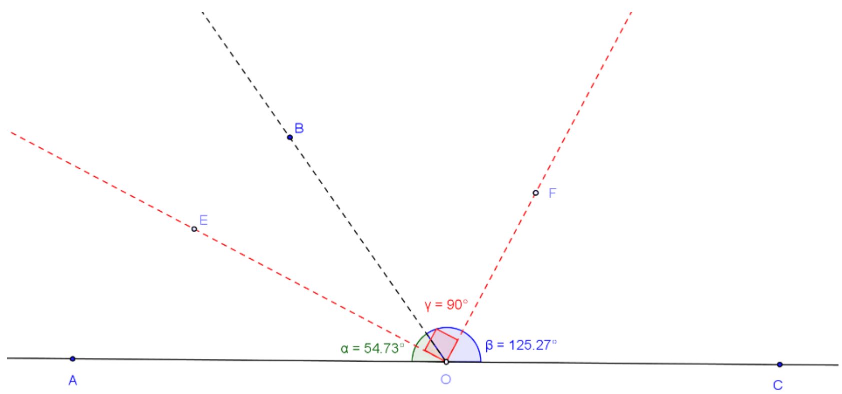


I. FÉLÉV

Merőleges egyenesek síkban

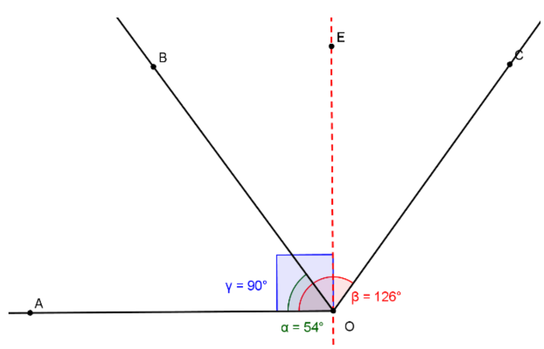
1. Legyen az $A\hat{O}B$ și $B\hat{O}C$, két egymás melletti kiegészítő szög, $[OE$ az $A\hat{O}B$, $[OF$ pedig a $B\hat{O}C$ szög szögfelezője. Igazoljátok, hogy $OE \perp OF$.

Ábra:



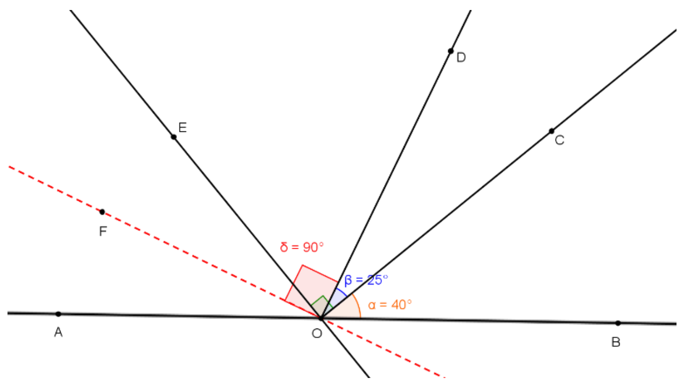
2. Legye $A\hat{O}B$ és $A\hat{O}C$, két, nem egymás melletti szög, $m(A\hat{O}B) = 54°$. Ha $(OE$ a $B\hat{O}C$ szög szögfelezője, mutassátok ki, hogy $OE \perp OA$.

Ábra:



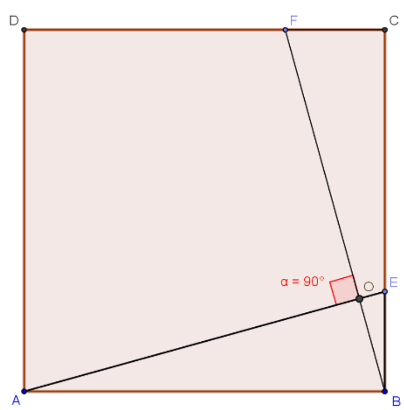
3. Legyen A, O és B három kollineáris pont. Az AB egyenes ugyanazon oldalán felvesszük az E, D és C pontokat úgy, hogy $EO \perp OC$, $(OD \subset int(E\hat{O}C)$, $m(B\hat{O}C) = 40°$ és $m(C\hat{O}D) = 25°$. Igazoljátok, hogy DO⊥OF, ahol $(OF$ az $E\hat{O}A$ szög szögfelezője.

Ábra:



4. Az ABCD négyzet oldalain vegyük fel az $E \in BC$ és $F \in CD$ pontokat úgy, hogy $BE \equiv CF$. Igazoljátok, hogy $AE \perp CF$.

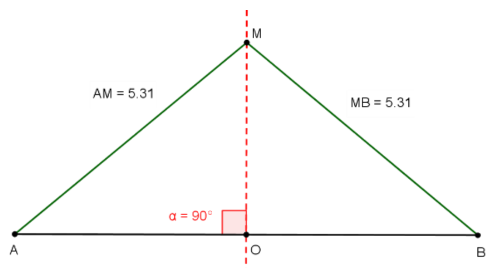
Ábra:



Szakasz felezőmerőlegese

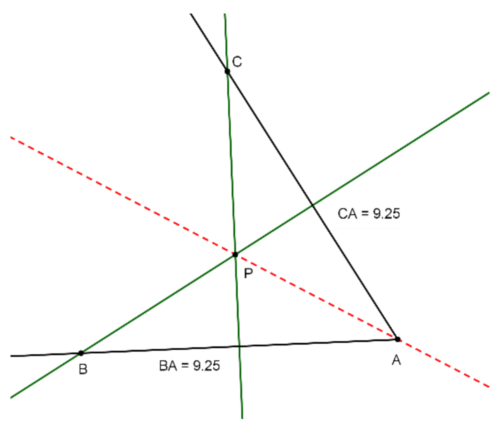
1. Igazoljátok, hogy egy szakasz felezőmerőlegesének pontjai egyenlő távolságra vannak a szakasz végpontjaitól.

Ábra:



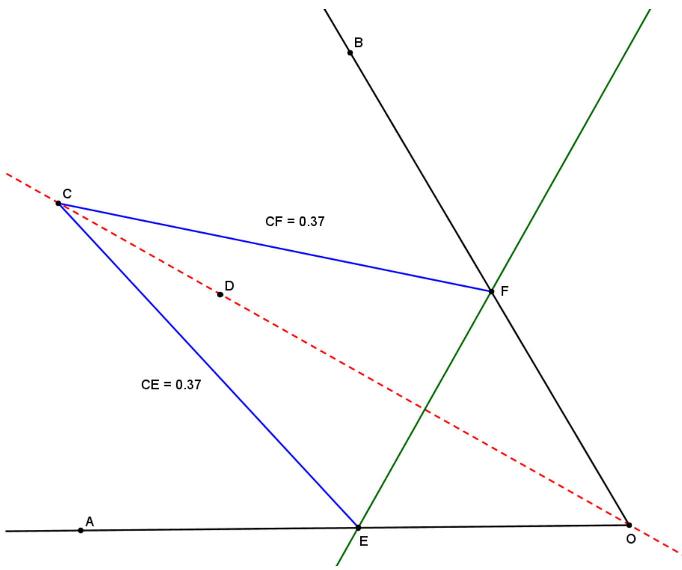
2. Adott a $B\hat{A}C$ szög, P pedig az $[AB]$ és $[AC]$ szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontja. Igazoljátok, hogy ha a P pont rajta van a $B\hat{A}C$ szögfelezőjén, akkor $[AB] \equiv [AC]$.

Ábra:



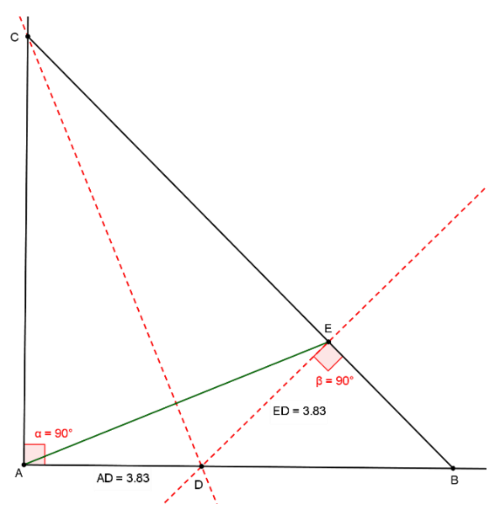
3. Legyen D az $A\hat{O}B$ szög $(OC$ szögfelezőjének egy pontja. Ha az $[OD]$ szakasz felezőmerőlegese az $(OA$ és $(OB$ félegyeneseket E illetve F pontokban metszi, igazoljátok, hogy OC az $[EF]$ szakasz felezőmerőlegese lesz.

Ábra:



4. Legyen $m(B\hat{A}C) = 90°$, CD az $A\hat{C}B$ szög szögfelezője, $CD \cap AB = \{D\}$ és $DE \perp BC$, $DE \cap BC = \{E\}$. Mutassátok ki, hogy a D pont rajta van az $[AE]$ szakasz felezőmerőlegesén.

Ábra:

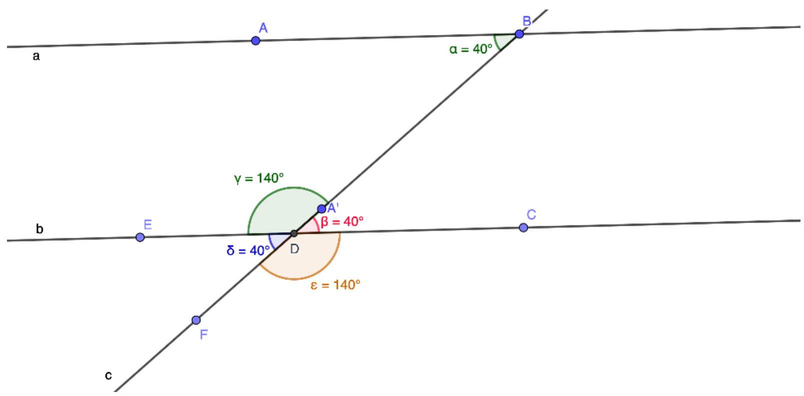


PÁRHUZAMOSSÁG

Párhuzamos egyenesek; párhuzamossági axióma. Gyakorlati alkalmazások

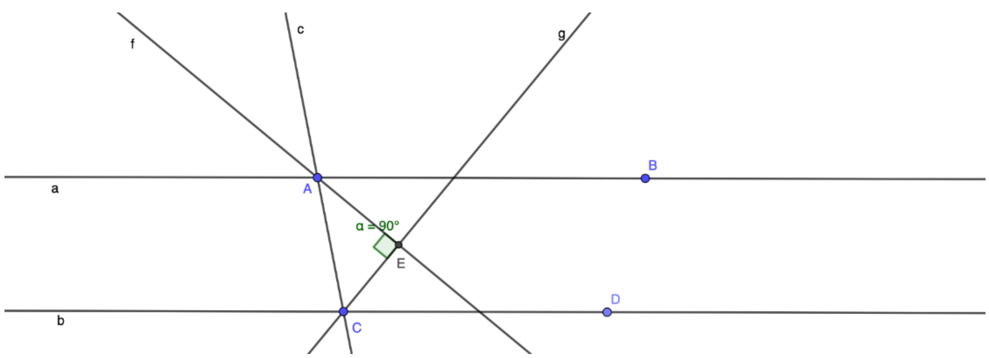
1. Az a és b egyeneseket metszünk egy c szelővel úgy, hogy a szelő az a egyenessel egy 40°-os belső szöget zár be. Határozzátok meg a b egyenes és a c szelő által bezárt szögek mértékét.

Ábra:



2. Az a és b párhuzamos egyeneseket egy c szelő A illetve C pontokban metsz. Legye B az a egyenes, D pedig a b egyenes egy-egy olyan pontja, amelyek a c egyeneshez viszonyítva ugyanabban a félsíkban helyezkednek el. Mutassátok ki, hogy a $\sphericalangle BAC$ szög szögfelezője merőleges az $\sphericalangle ACD$ szög szögfelezőjére.

Ábra:

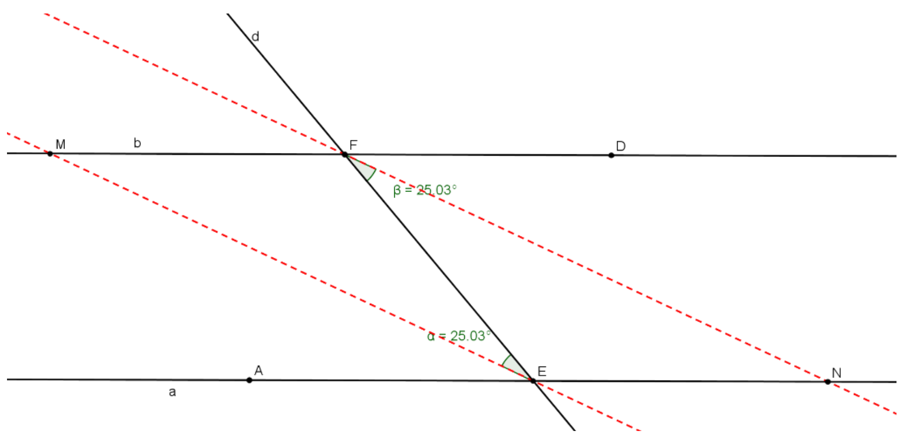


:

Párhuzamossági kritériumok

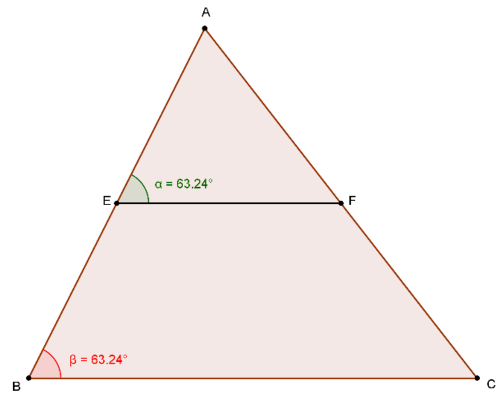
1. Legyen a és b két párhuzamos egyenes, amelyeket egy d szelő E és F pontokban metsz. Igazoljátok, hogy a belső váltó szögek szögfelezői párhuzamosak.

Ábra:



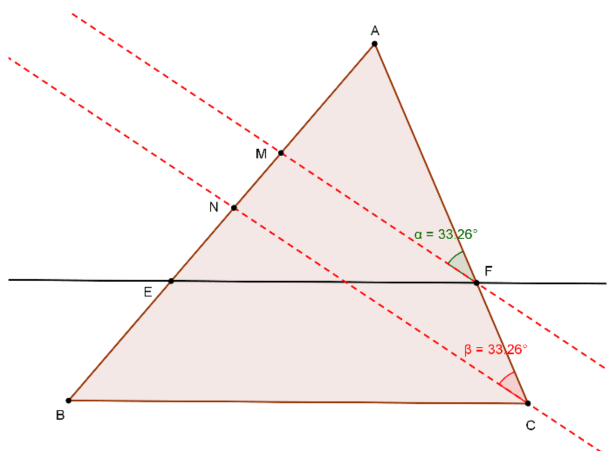
2. Legyen E és F az ABC háromszög AB illetve AC szárainak felezőpontja. Igazoljátok, hogy $EF||BC$.

Ábra:



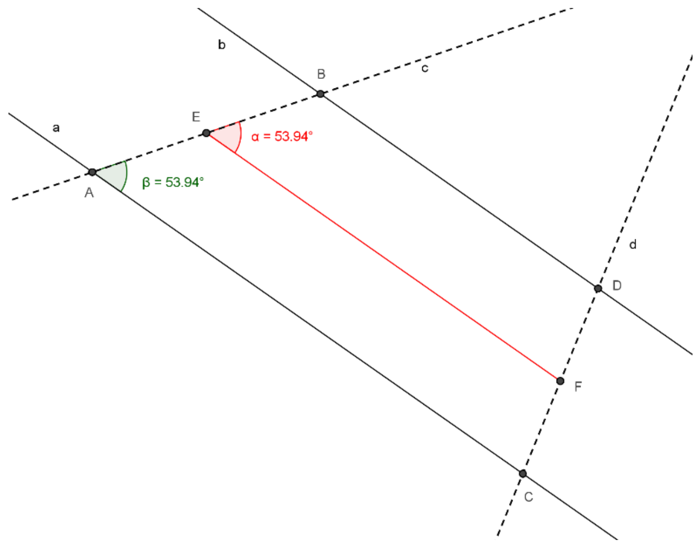
3. Legyen E és F az ABC háromszög AB illetve AC oldalának két olyan pontja, amelyre $EF||BC$. Igazoljátok, hogy az $A\hat{C}B$ és $A\hat{F}E$ szögek szögfelezői párhuzamosak.

Ábra:



4. Az *a* és *b* párhuzamos egyeneseket a *c* és *d* szelők A és B valamint C és D pontokban metsz. Igazoljátok, hogy az AB és CD szakaszok felezőpontjai által maghatározott szakasz párhuzamos az *a* és *b* egyenesekkel.

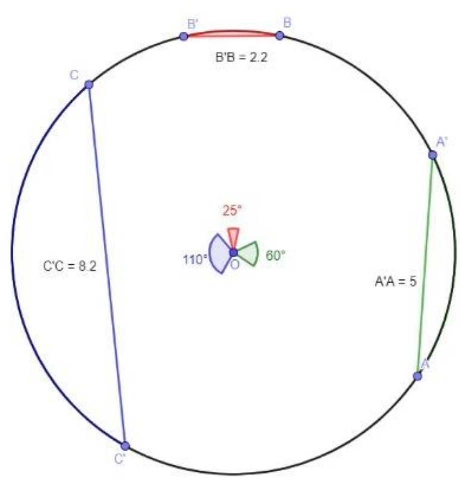
Ábra:



A KÖR
A kör. A kör részei

1. Rajzolj egy O középpontú és 5 cm sugarú kört. A körön ábrázolj egy 60°, egy 25° és egy 110° mértékű körívet. Szerkeszd meg a körívekhez tartozó húrokat és hasonlítsd össze hosszukat.

Ábra:

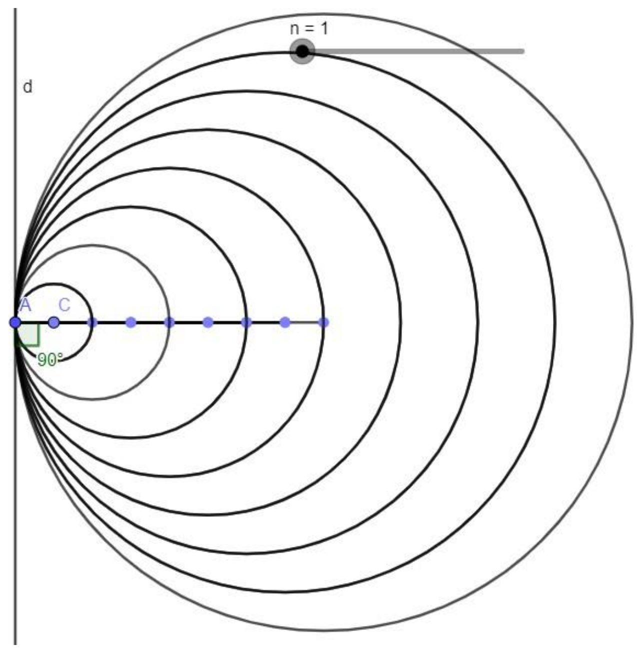


I. FÉLÉV

Kör és egyenes kölcsönös helyzete

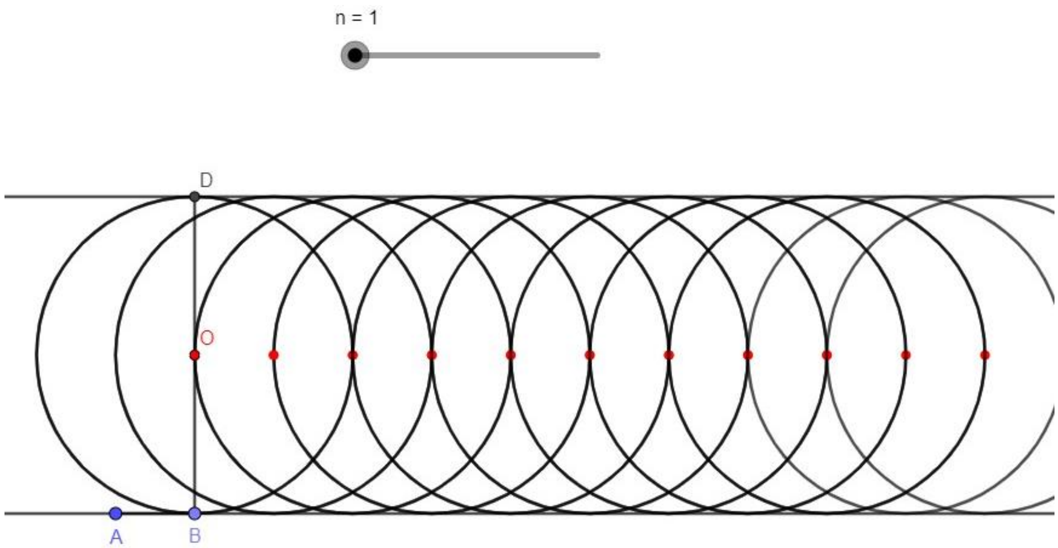
1. a) Legyen *d* egy egyenes és A egy rajta fekvő pont. Hány olyan kör létezik amely áthalad az A ponton és érinti a *d* egyenest? Mit alkotnak ezen körök középpontjai?

Ábra:



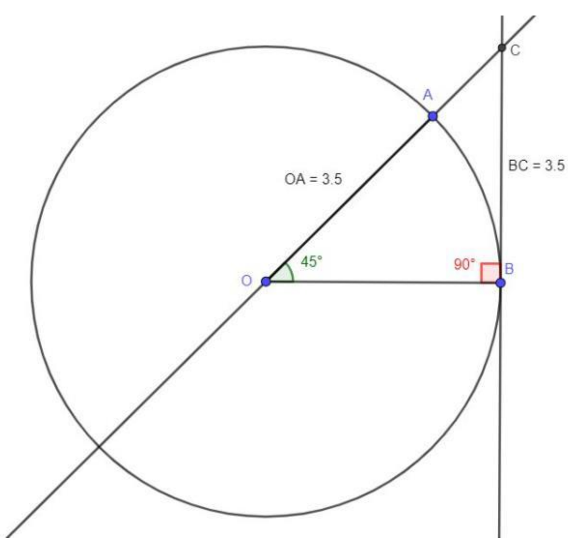
b) Legyen két párhuzamos egyenes. Hány olyan kör rajzolható amely érinti mindkét egyenest? Mit ír le ezen körök középpontja?

Ábra:



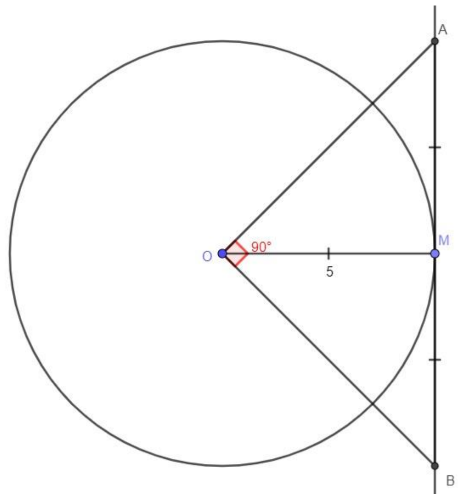
2. Egy O középpontú körben rajzoljuk meg az OA és OB sugarakat, úgy, hogy 45°-os szöget zárjanak be. A körhöz a B pontba húzott érintő az OA egyenest C-ben metszi. Határozzátok meg a ∢CBO szög mértékét és hasonlítsátok össze A BC és OA szakaszok hosszát.

Ábra:



I. FÉLÉV

3. Adott a $\mathcal{C}(O, 5)$ kör és egy rajta fekvő M pont. Az M pontba húzott érintőn vegyük fel az A és B pontokatúgy, hogy MA=MB=OA. Határozzátok meg az $A\hat{O}B$ szög mértékét.



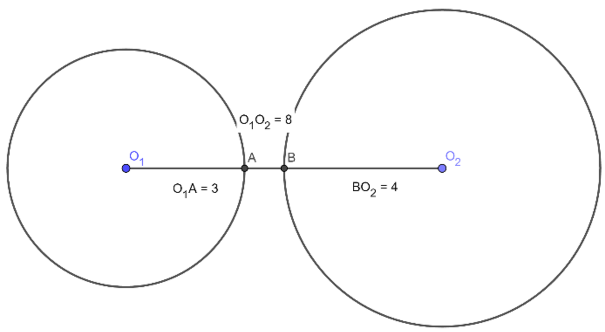
I. FÉLÉV

Két kör kölcsönös helyzetei

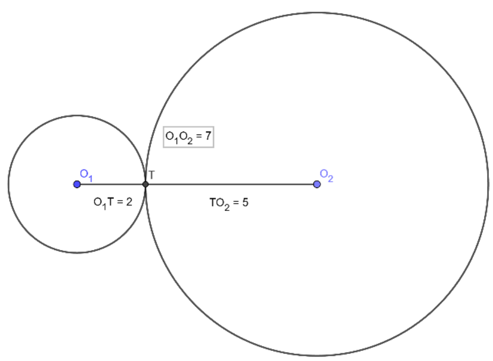
1.Szerkesszétek meg a $\mathcal{C}(O_1;r_1)$ és $\mathcal{C}(O_2;r_2)$ köröket, a következő esetekben, majd nevezzétek meg a körök kölcsönös helyzeteit:

a) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 4$ cm és $O_1O_2 = 8$ cm

Ábra:

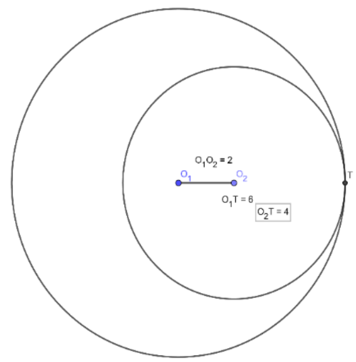


b) $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 5$ cm és $O_1O_2 = 7$ cm
Ábra:

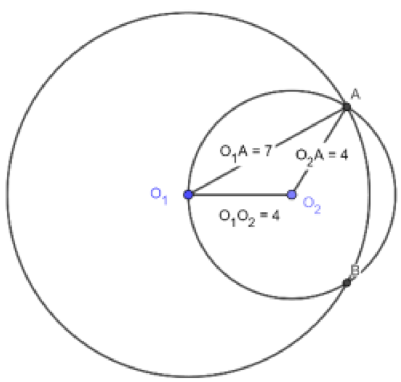


c) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 4$ cm és $O_1O_2 = 2$ cm

Ábra:



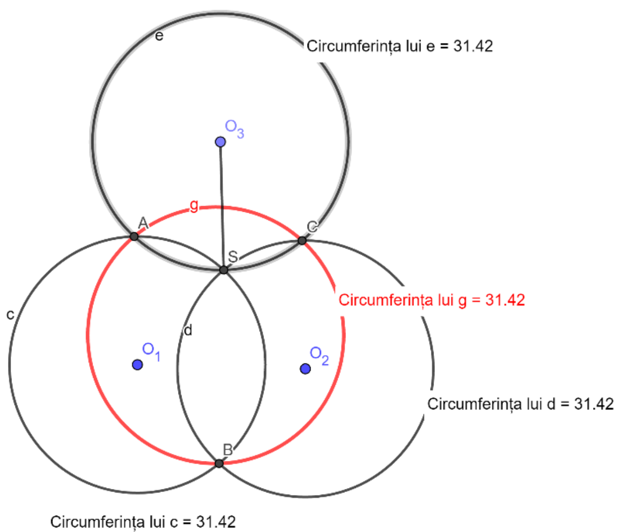
d) $r_1 = 7$ cm, $r_2 = 2$ cm és $O_1O_2 = 4$ cm



3. Az 5 lejes pénzérme problémája – Țițeica – módosított feladat

   Három egyenlő sugarú kör egy pontban metszi egymást. A köröket párosával véve a három nem közös metszéspont egy olyan kört határoz meg, amely kongruens az eredeti körökkel.

Ábra:



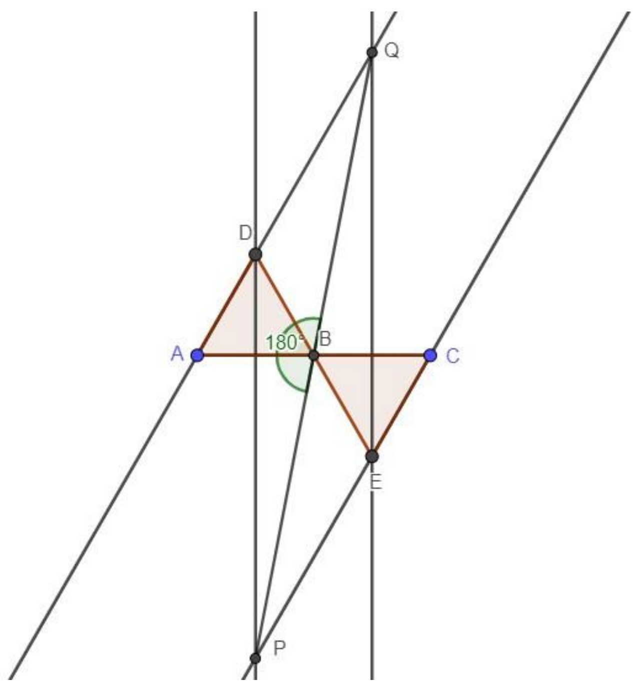
I. FÉLÉV

A HÁROMSZÖG

A háromszög. A háromszögek osztályozása. A háromszög kerülete

1. Legyen B az AC szakasz felezőpontja, D és E pedig az AC egyenes két különböző oldalán fekvő olyan pont, amelyre az ABD és BCE háromszögek egyenlő oldalúak. Ha a D pontból az AB egyenesre húzott merőleges az EC egyenest P-ben és az E pontból az AB húzott merőleges az AD egyenest Q-ban metszi. Mutassátok ki, hogy a P, B és Q pontok kollineárisak.

Ábra:

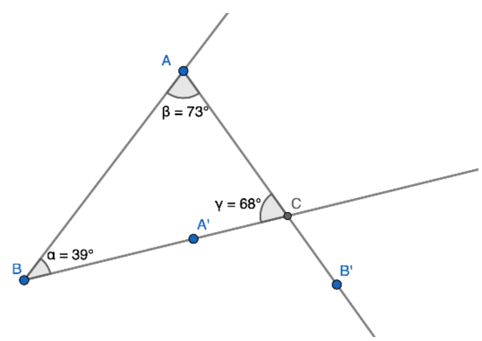


I. FÉLÉV

A háromszög szögeinek összege. A háromszög külső szöge

1. Egy háromszög egyik szögének mértéke 39°, másik szögének mértéke 73°. Határozzátok meg a harmadik szög mértékét.

Ábra:



I. FÉLÉV

Könyvészet

1. Hollinger A. Geometrie, *Manual pentru clasa a VI-a*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1977.

2. Supliment *Gazeta Matematică*, Martie 2019.

3. Sorin Peligrad, Ioan Șerdean. Adrian Țurcanu, *Matematică: Algebră, Geometrie - clasa a VI-a / standard*, Editura Paralela 45.

4. Dan, Maria Zaharia, *Matematică: algebră, geometrie - clasa a VI-a / Consolidare*, Editura Paralela 45.

5. Ion Tudor, *Matematică: algebră, geometrie - caiet de lucru clasa a VI-a*, Editura Paralela 45.

6. Cristian Petru Pop, Simona Maria Pop, *Olimpiada satelor din România*, Editura Nomina.

7. Ioana Monalisa Manea, Cristina Neagoe, *Culegere de probleme pentru clasa a VI-a,* Editura Mediaprint.