GeoGebra segítségével bizonyított feladatok

VI. osztály

II. félév

A Digitaliada programban résztvevő iskolák matematika tanárai által összeállított kiadvány, koordinálta Adina Roşca Oktatási Szakértő

Digitaliada Fundația orange

GeoGebra segítségével bizonyított feladatok – VI. osztály

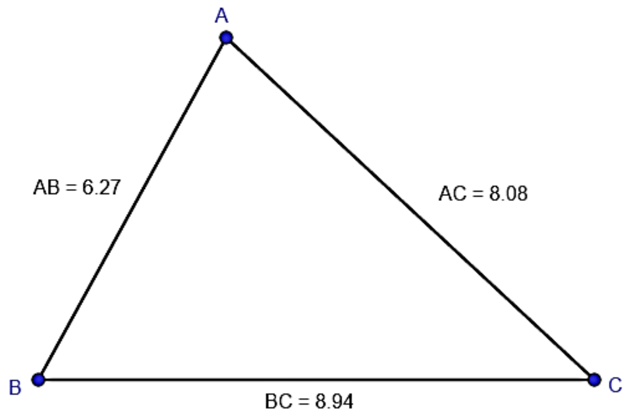
II. FÉLÉV

Tartalomjegyzék

A Digitaliada program keretén belül összeállított kiadvány.

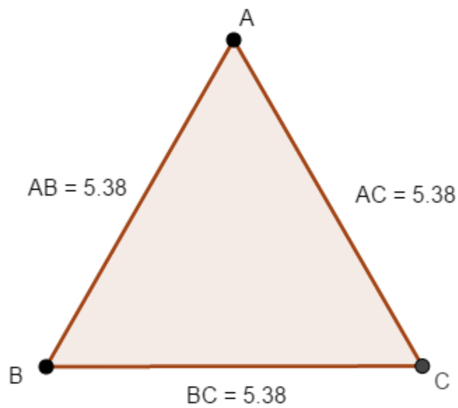
A háromszög kerülete

1. Legyen A, B és C három nem kollineáris pont. Határozzátok meg az ABC háromszög kerületét.



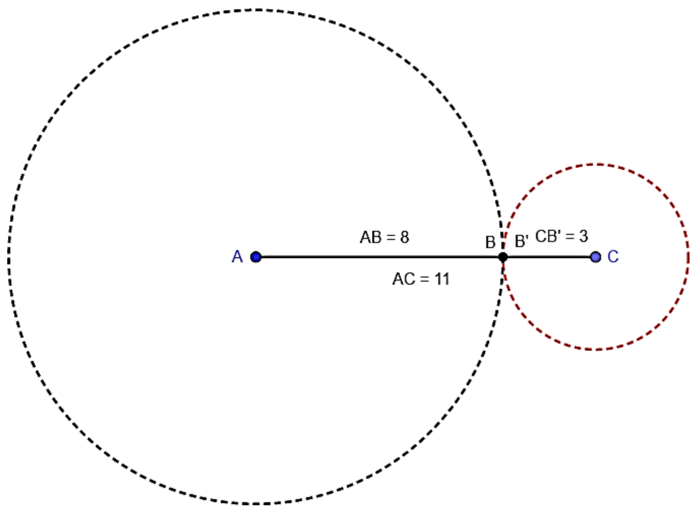
$$P_{ABC} = AB + BC + CA = 6.27 + 8.94 + 8.08 = 23.3 \text{ cm}$$

2. Határozzátok meg egy egyenlő oldalú háromszög kerületét.

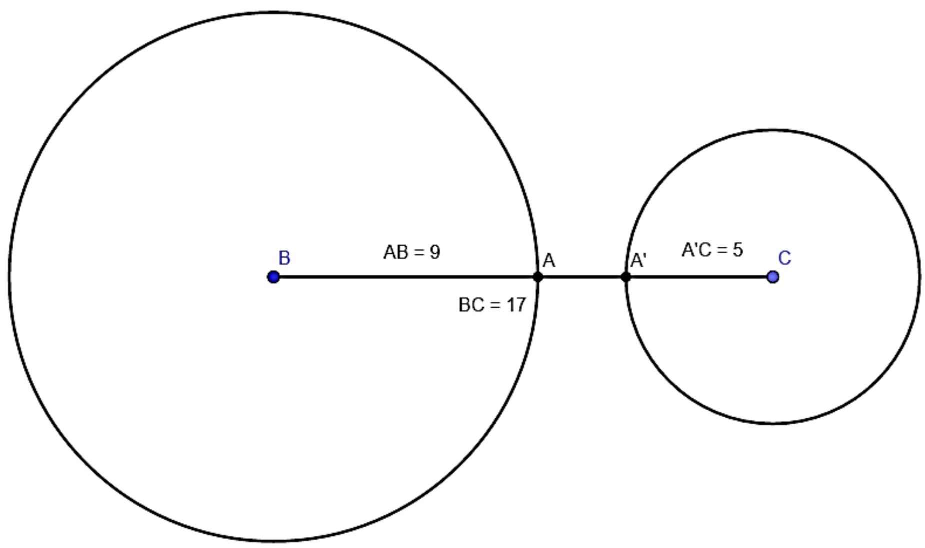


$$P_{ABC} = AB + BC + CA = 3AB = 16.13\ cm$$

3. Adottak az $AB = 8\ cm$, $AC = 11\ cm$ és $BC = 3\ cm$ hosszúságú szakaszok. Határozzátok meg az A, B és C pontok egymáshoz viszonyított helyzetét.



4. Vizsgáljátok meg, hogy létezik-e olyan háromszög, amelynek oldalai $AB = 9\ cm$, $BC = 17\ cm$ és $CA = 5\ cm$ hosszúságúak.

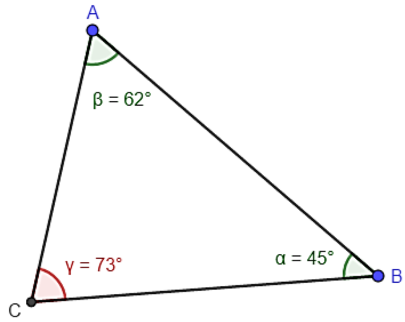


GeoGebra segítségével bizonyított feladatok – VI. osztály

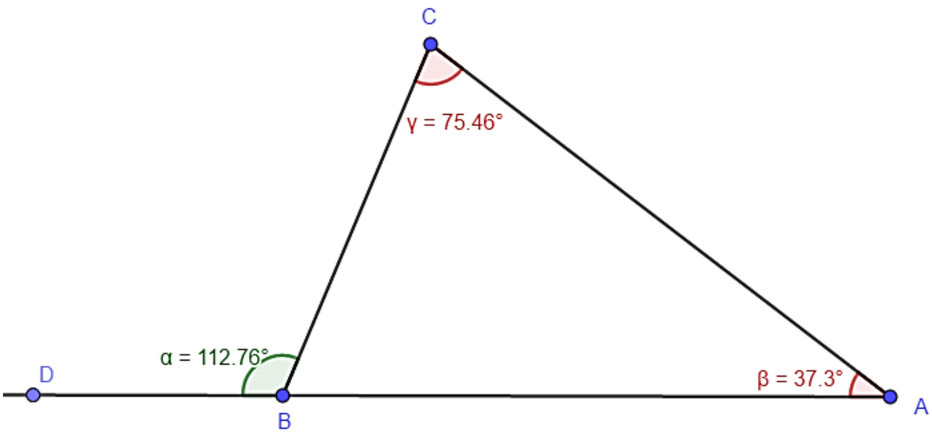
II. FÉLÉV

Egy háromszög szögeinek tulajdonságai

1. Az ABC-ben $m(\sphericalangle ABC) = 45°$ és $m(\sphericalangle CAB) = 62°$. Határozzátok meg a $\sphericalangle BCA$ szög mértékét!



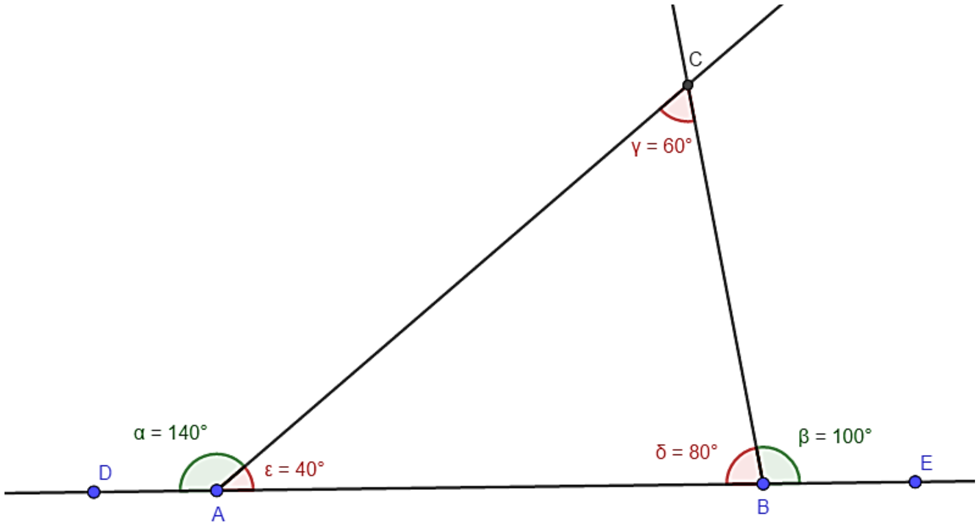
2. Igazoljátok, hogy egy háromszög külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő belső szögek összegével.



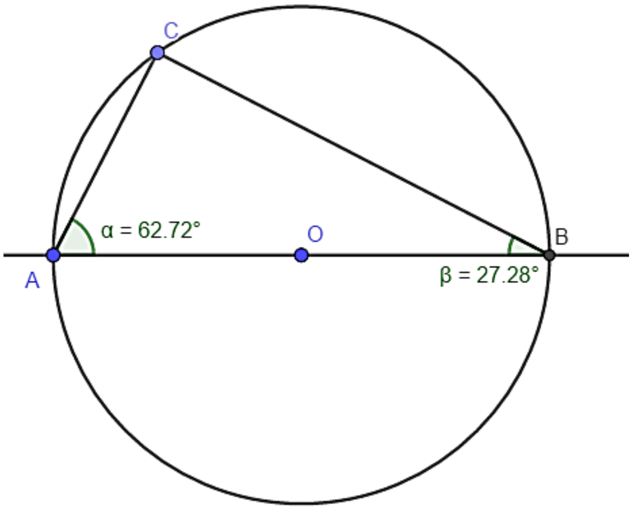
$$\beta + \gamma = 37.3° + 75.46° = 112.76°$$

A Digitaliada program keretén belül összeállított kiadvány.

3. Egy háromszög két külső szögének mértéke $140°$, illetve $100°$. Határozzátok meg a háromszög belső szögeinek mértékét.



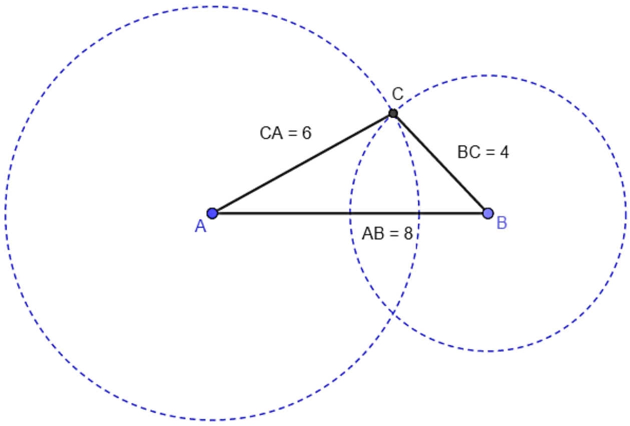
4. Legyen A és B a $C(O, r)$ kör két átmérősen ellentett pontja, és C a kör egy tetszőleges pontja. Igazoljátok, hogy az $\sphericalangle BAC$ és $\sphericalangle CBA$ szögek pótszögek.



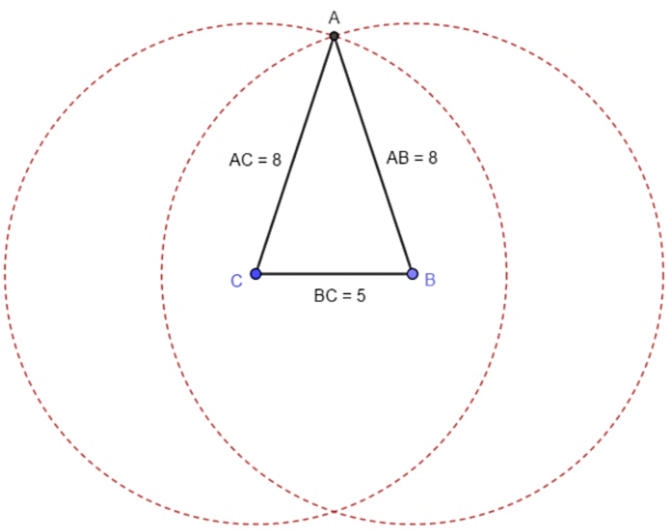
$$m(C\hat{B}A) + m(B\hat{A}C) = 62.72^\circ + 27.28^\circ = 90^\circ$$

Háromszögek szerkesztése

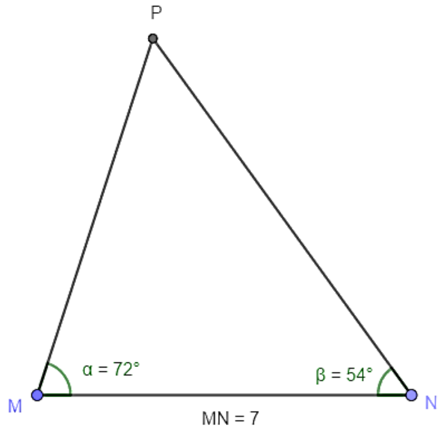
1. Szerkesszétek meg azt az ABC háromszöget, amelynek oldalai az $AB = 8\ cm$, $BC = 4\ cm$ és $CA = 6\ cm$ hosszúságú szakaszok.



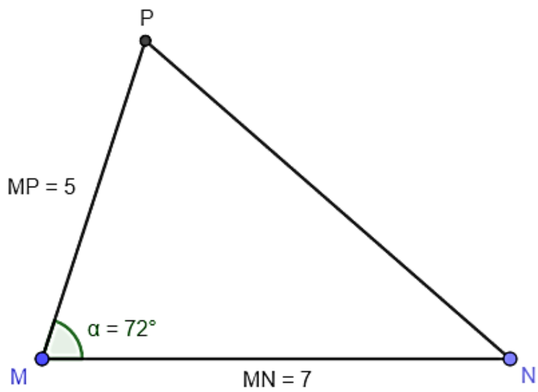
2. Szerkesszétek meg azt az ABC egyenlő szárú háromszöget, amelynek oldalai az $AB = AC = 8\ cm$ és $BC = 5\ cm$ hosszúságú szakaszok.



3. Szerkesszétek meg azt az MNP háromszöget, amelynek alapja az $MN = 7\ cm$ szakasz, a rajta fekvő szögek pedig $m(\sphericalangle PMN) = 72°$ és $m(\sphericalangle PNM) = 54°$.

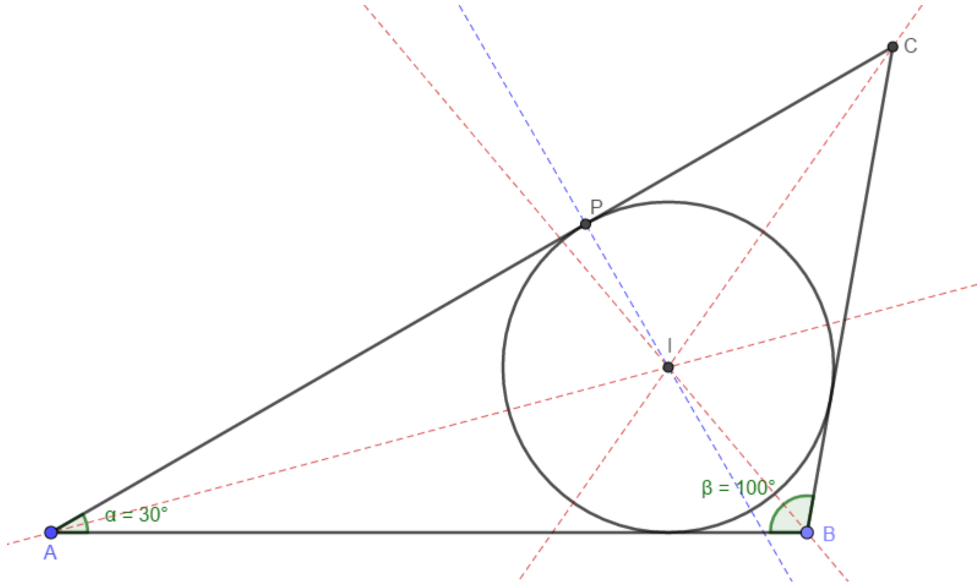


4. Szerkesszétek meg azt az MNP háromszöget, amelyben $MN = 7\ cm$, $PM = \ 5\ cm$ és $m(PMN\sphericalangle) = 72°$.

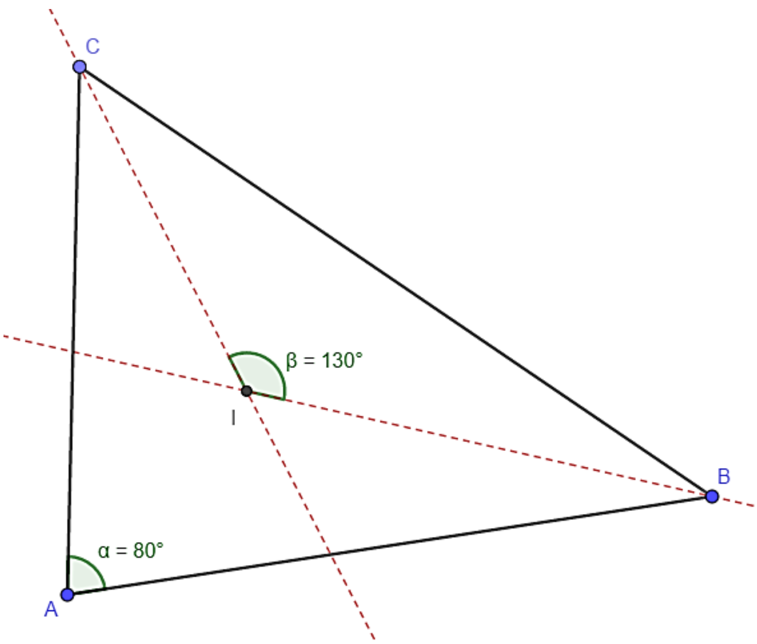


A háromszög szögfelezői

1. Szerkesszétek meg az ABC háromszögbe írt kört, ha $AB = 6\ cm$, $m(\sphericalangle BAC) = 30°$ és $m(\sphericalangle ABC) = 100°$.

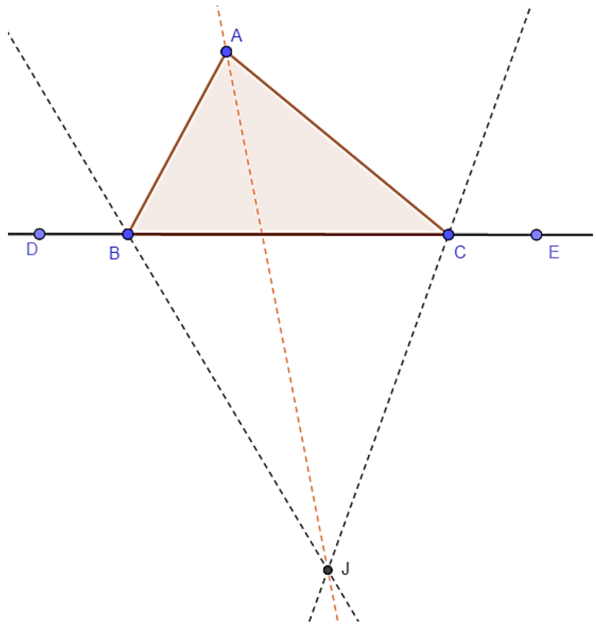


2. Legyen ABC egy olyan háromszög, amelyben $m(\sphericalangle BAC) = 80°$. Határozzátok meg az $\sphericalangle ABC$ és $\sphericalangle ACB$ szögek szögfelezői által alkotott szög mértékét.

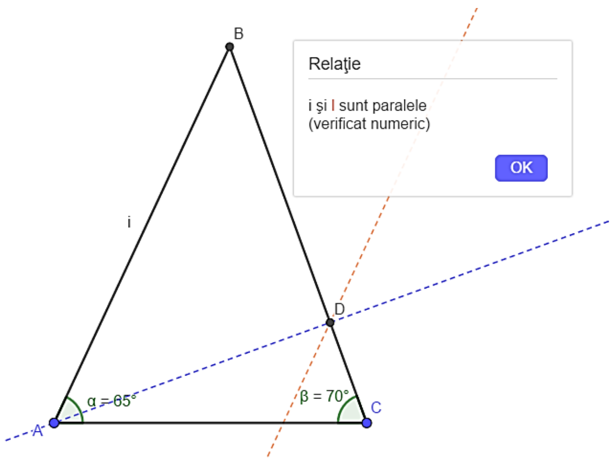


A Digitaliada program keretén belül összeállított kiadvány.

3. Ha $\sphericalangle ABD$ és $\sphericalangle ACE$ az ABC háromszög két külső szöge és J ezen szögek szögfelezőinek metszéspontja, mutassátok ki, hogy J rajta van a $\sphericalangle BAC$ szög szögfelezőjén.



4. Az ABC háromszögben $m(\sphericalangle BAC) = 65°$ és $m(\sphericalangle ACB) = 70°$, megszerkesztjük $AD \perp BC$ egyenest, $D \in [BC]$. Mutassátok ki, hogy az $\sphericalangle ADC$ szög szögfelezője párhuzamos az AB egyenessel.



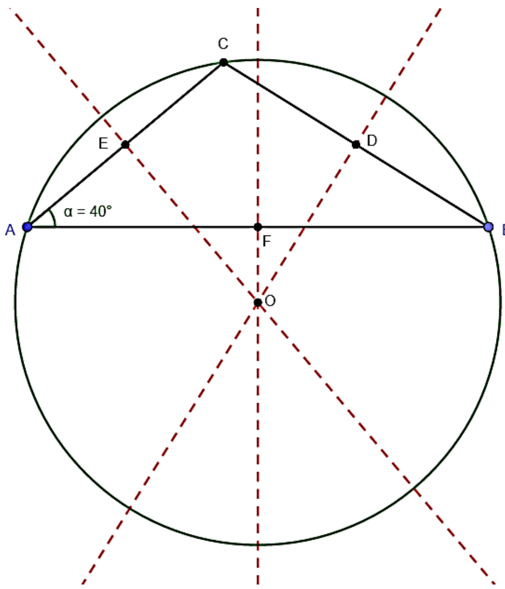
A Digitaliada program keretén belül összeállított kiadvány.

GeoGebra segítségével bizonyított feladatok – VI. osztály

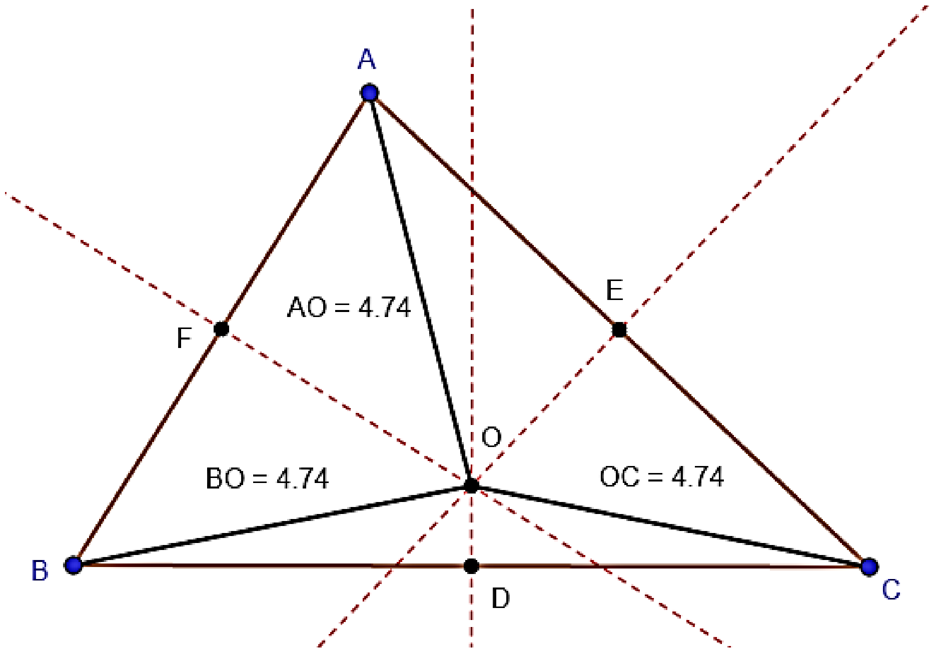
II. FÉLÉV

A háromszög oldalfelező merőlegesei

1. Szerkesszétek meg az ABC háromszög köré írt kört tudva, hogy $AB = 9\ cm$, $AC = 5\ cm$ és $m(\sphericalangle BAC) = 40°$.



2. Igazoljátok, hogy az oldalfelező merőlegesek metszéspontja egyenlő távolságra helyezkedik el a háromszög csúcsaitól.

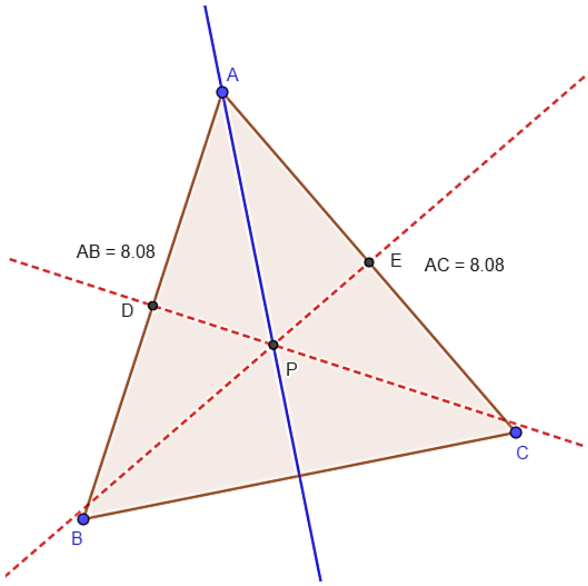


A Digitaliada program keretén belül összeállított kiadvány.

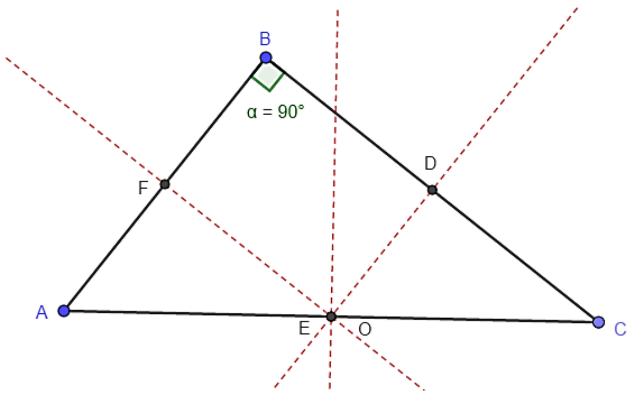
GeoGebra segítségével bizonyított feladatok – VI. osztály

II. FÉLÉV

3. Az ABC háromszögben az AC és AB oldalak felezőmerőlegesei egy P pontban metszik egymást. Mutassátok ki, hogy ha a P pont rajta van a $\sphericalangle BAC$ szög szögfelezőjén, akkor $[AB] \equiv [AC]$.



4. Igazoljátok, hogy egy derékszögű háromszög köré írt kör középpontja egybeesik az átfogó felezőpontjával.

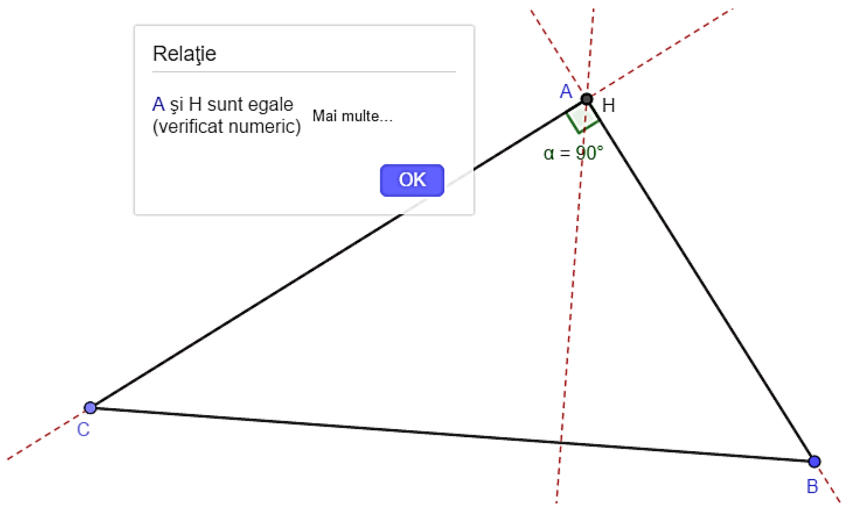


GeoGebra segítségével bizonyított feladatok – VI. osztály

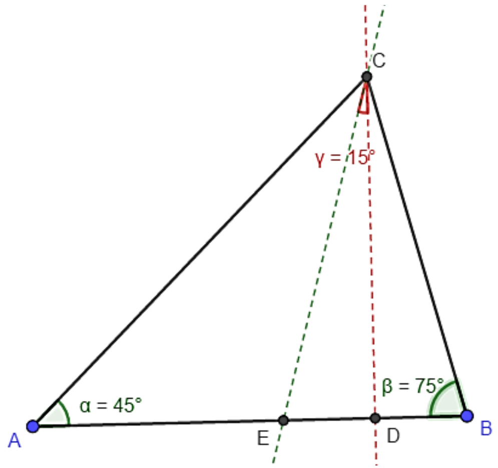
II. FÉLÉV

A háromszög magassága

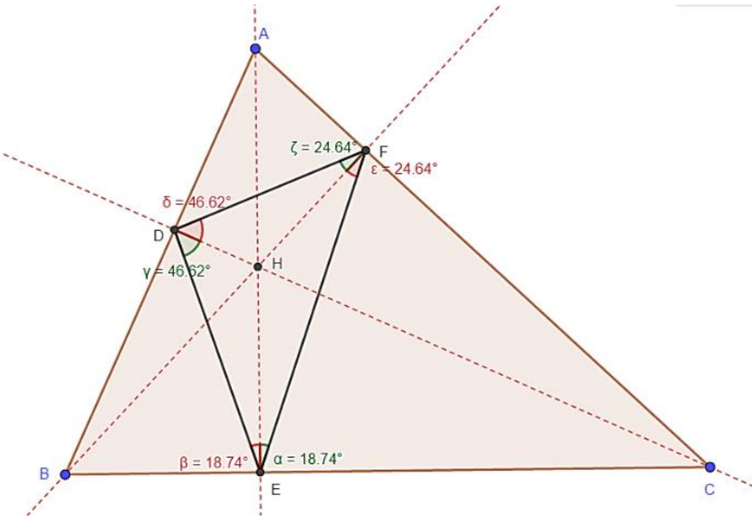
1. Legyen az ABC , A-ban derékszögű háromszög. Igazoljátok, hogy a háromszög A csúcsa egybeesik a háromszög ortocentrumával.



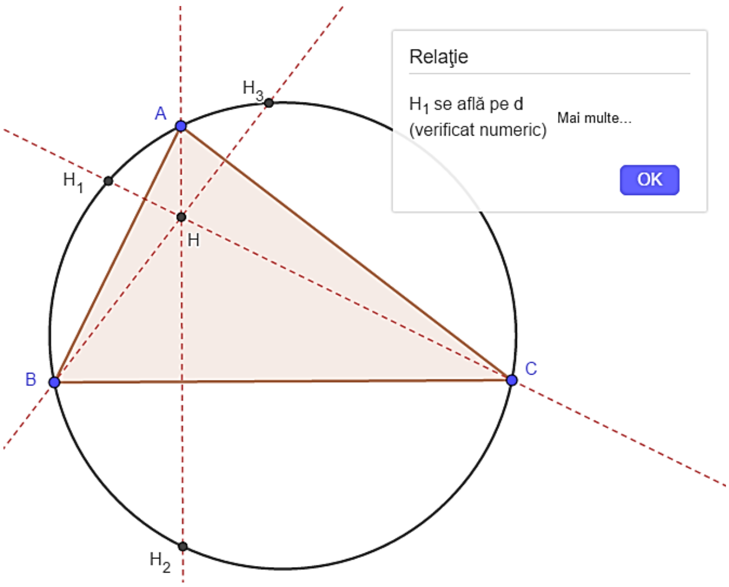
2. Az ABC háromszögben $m(\sphericalangle ABC) = 75°$ és $m(\sphericalangle CAB) = 45°$. Határozzátok meg $(CD$ magasság és a $(CE$ szögfelező által bezárt szög mértékét, ahol $D, E \in (AB)$.



3. Igazoljátok, hogy az ABC háromszög magasságai, szögfelezők lesznek a talpponti háromszögben.



4. Igazoljátok, hogy egy háromszög ortocentrumának az oldalak szerinti szimmetrikusai a háromszög köré írt körön helyezkednek el.

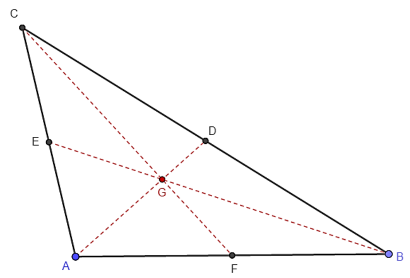


GeoGebra segítségével bizonyított feladatok – VI. osztály

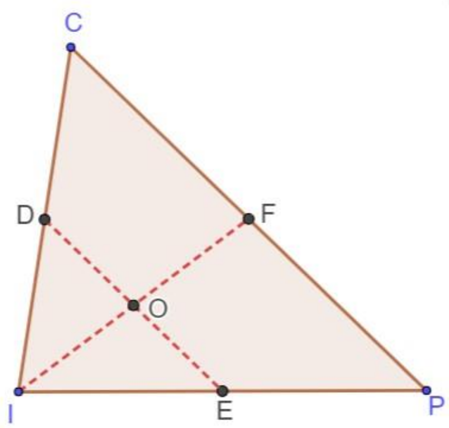
II. FÉLÉV

A háromszög oldalfelezői

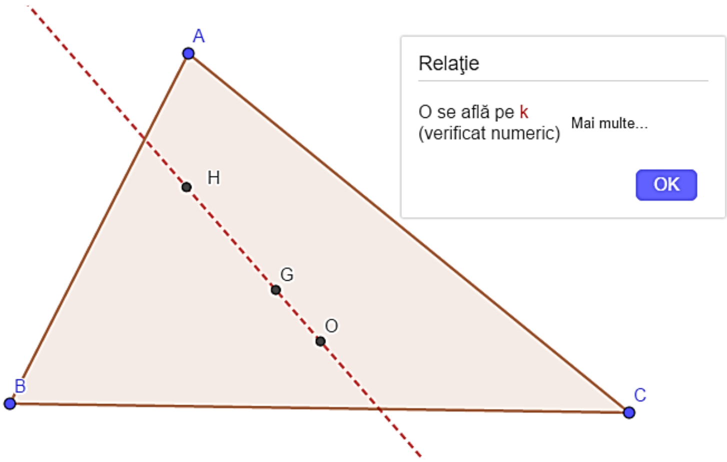
1. Szerkesszétek meg egy olyan háromszög súlypontját, amely oldalainak hossza $6\ cm, 8\ cm$ és $11\ cm$.



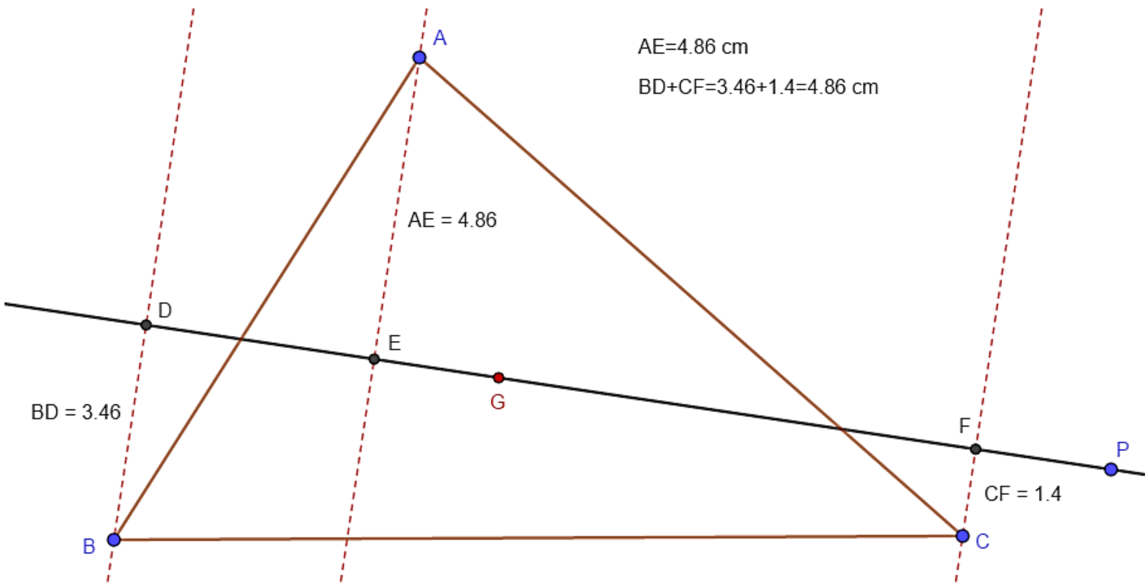
2. A CIP háromszögben a D, E, F pontok a CI, IP és CP oldalak felezőpontjait jelölik. A DE és IF egyenesek O pontban metszik egymást. Igazoljátok, hogy IO az IDE háromszög oldalfelezője.



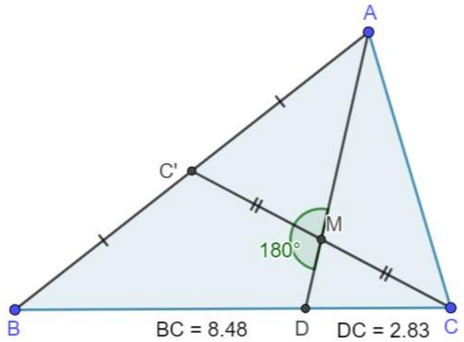
3. Igazoljátok, hogy az ortocentrum, a súlypont és a háromszög köré írt kör középpontja kollineáris pontok.



4. Határozzátok meg egy háromszög csúcsainak, a háromszög súlypontján áthaladó egyenestől mért távolságok algebrai összegét. Igazoljátok, hogy ezen távolságok algebrai összege nulla.



5. Az ABC-ben, D a BC oldal egy olyan pontja, amelyre $\frac{DC}{BC} = \frac{1}{3}$. Ha M a CC' oldalfelező felezőpontja, $C' \epsilon AB$, mutassátok ki, hogy az A, M $és$ D kollineáris pontok.

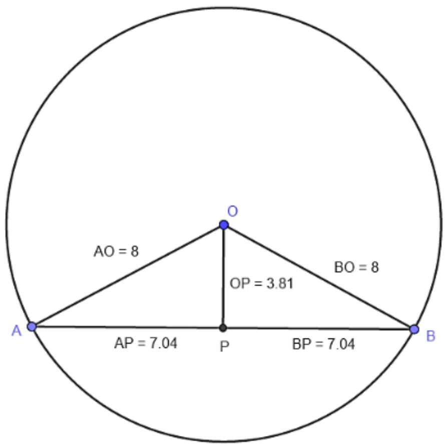


GeoGebra segítségével bizonyított feladatok – VI. osztály

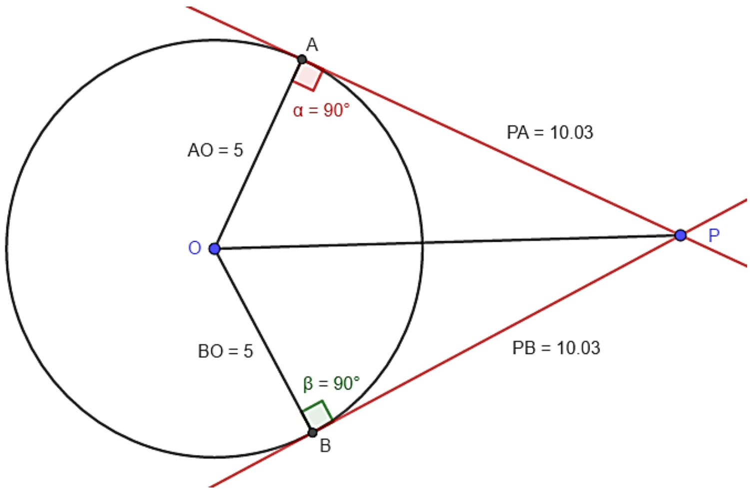
II. FÉLÉV

Háromszögek kongruenciája

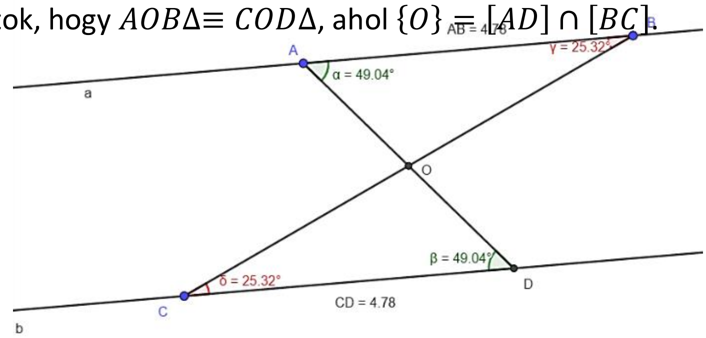
1. Legyen a P pont a $C(O,r)$ kör AB húrjának középpontja. Igazoljátok, hogy $AOP\Delta \equiv BOP\Delta$.



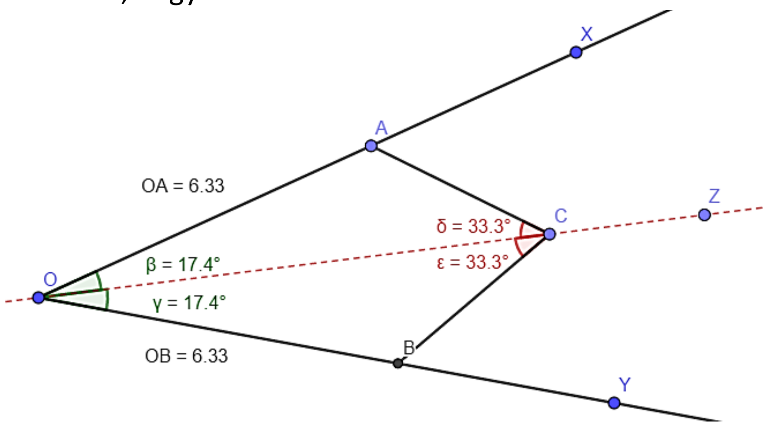
2. A $C(O,r)$ kör egy külső P pontjából húzzuk meg a PA és PB érintőket. Igazoljátok, hogy $AOP\Delta \equiv BOP\Delta$.



3. Legyen a és b két párhuzamos egyenes. Vegyük fel az $A, B \in a$ és $C, D \in b$ pontokat úgy, hogy $[AB] \equiv [CD]$. Igazoljátok, hogy $AOB\Delta \equiv COD\Delta$, ahol $\{O\} = [AD] \cap [BC]$.

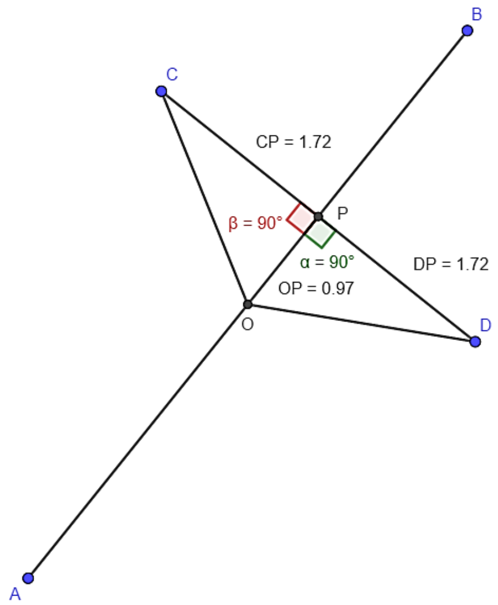


4. Legyen az $[OZ$ félegyenes az $\sphericalangle XOY$ szög szögfelezője. Ha $A \in [OX, B \in [OY, C \in [OZ$ úgy, hogy $[OA] \equiv [OB]$, mutassátok ki, hogy $OAC\Delta \equiv OBC\Delta$.

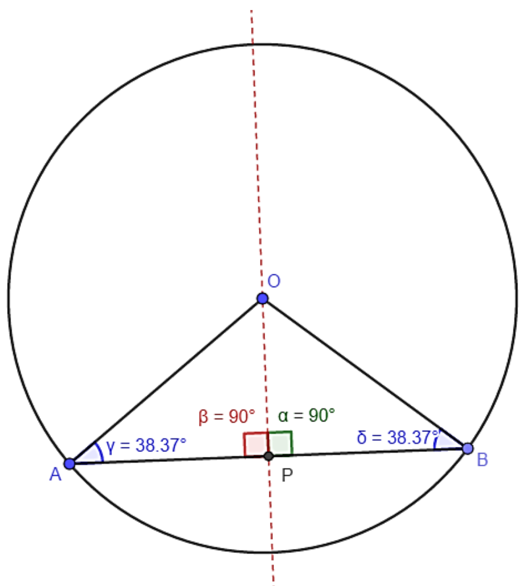


A derékszögű háromszögek kongruenciája

1. Jelölje O az AB szakasz felezőpontját és vegyük fel a $C \notin AB$ pontot. Ha D a C pont AB egyenes szerinti szimmetrikusa, mutassátok ki, hogy $POC\Delta \equiv POD\Delta$, ahol $\{P\} = [AB] \cap [CD]$.



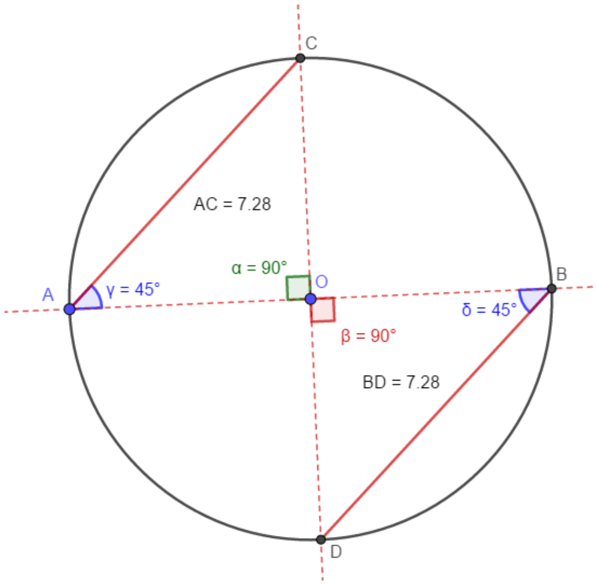
2. Legyen a $C(O,r)$ körben AB egy tetszőleges húr, és P az O pontból a húrra húzott merőleges egyenes talppontja. Igazoljátok, hogy $AOP\Delta \equiv BOP\Delta$.



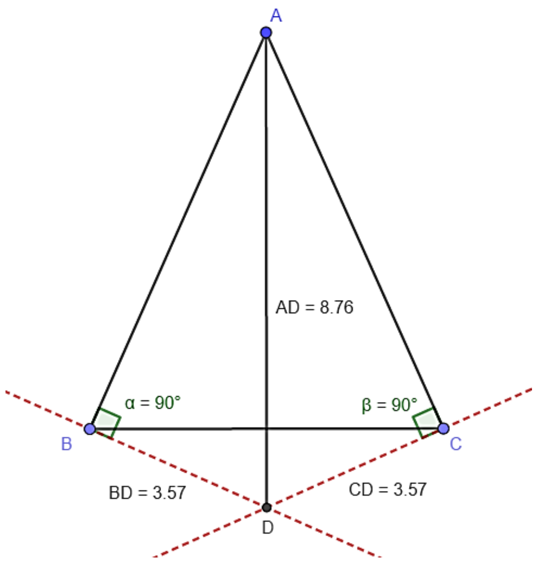
GeoGebra segítségével bizonyított feladatok – VI. osztály

II. FÉLÉV

3. Legyen AB és CD a $C(O, r)$ kör két egymásra merőleges átmérője. Igazoljátok, hogy $AOC\Delta \equiv BOD\Delta$.

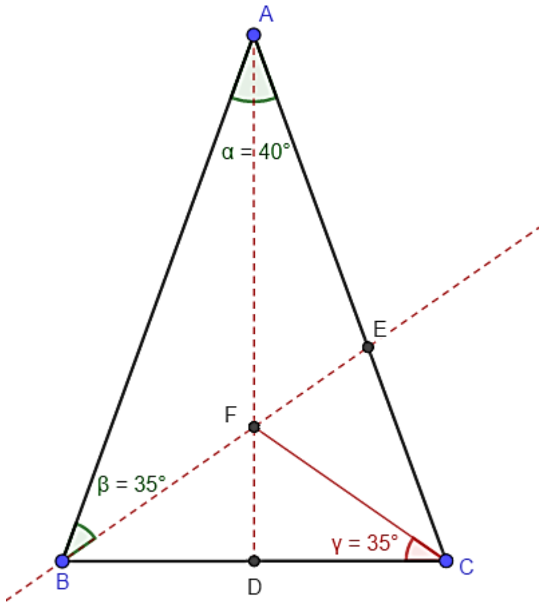


4. Adott az ABC egyenlő szárú háromszög, $[AB] \equiv [AC]$. Legyen D az AB oldal B pontjába, illetve az AC oldal C pontjába állított merőleges egyenesek metszéspontja. Igazoljátok, hogy $ADB\Delta \equiv ADC\Delta$.

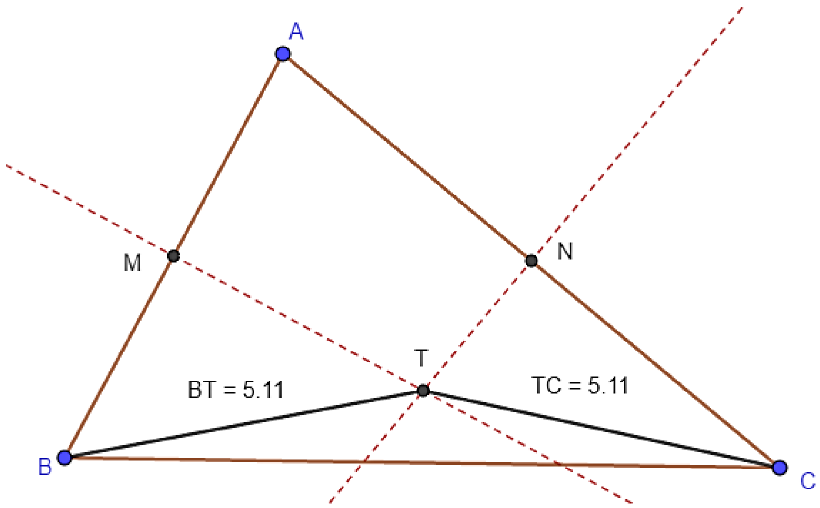


Az egyenlő szárú háromszög

1. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $[AB] \equiv [AC]$ és $m(\sphericalangle BAC) = 40°$. Jelölje D a $[BC]$ oldal felezőpontját. Az $\sphericalangle ABC$ szög szögfelezője az $[AC]$ oldalt E-ben metszi és $AD \cap BE = \{F\}$. Határozzátok meg $\sphericalangle ABE$ és $\sphericalangle BCF$ szögek mértékét.



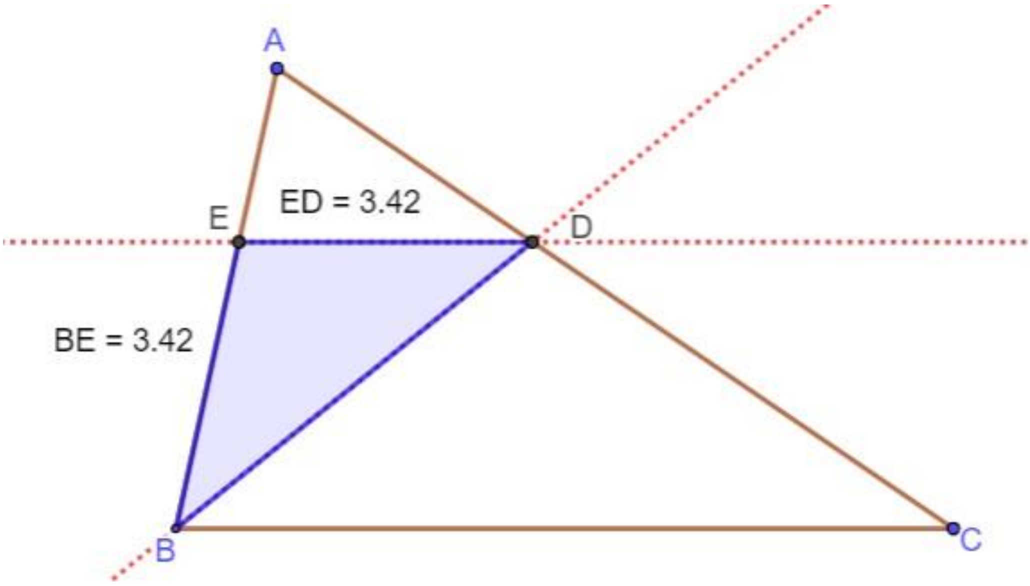
2. Az ABC-ben TM és TN az $[AB]$ és $[AC]$ oldalak felezőmerőlegesei, $M \in [AB]$ és $N \in [AC]$. Mutassátok ki, hogy a TBC háromszög egyenlő szárú.



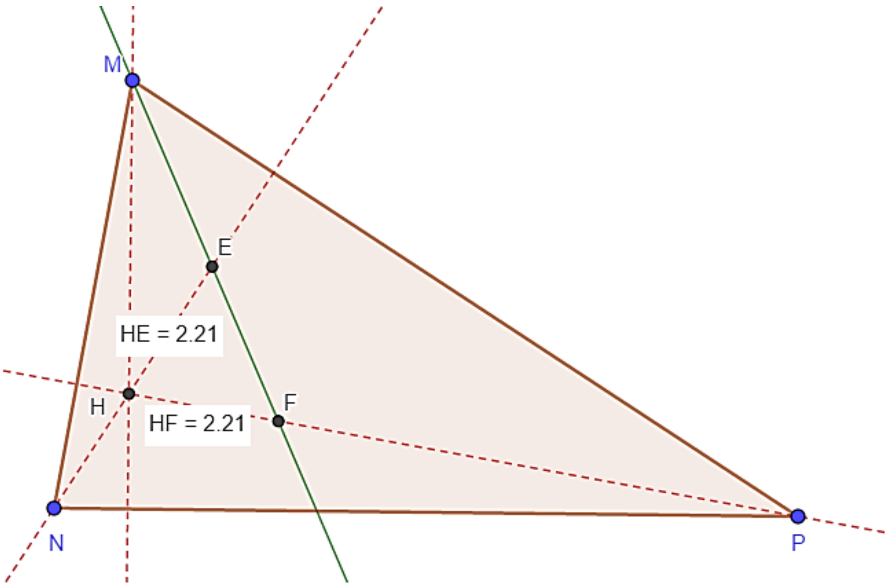
GeoGebra segítségével bizonyított feladatok – VI. osztály

II. FÉLÉV

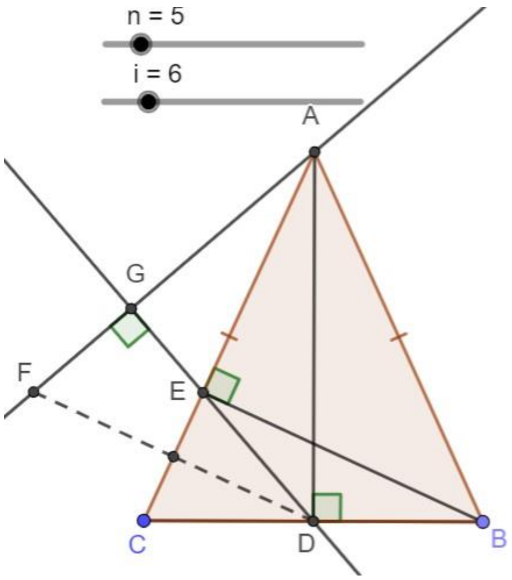
3. Az ABC háromszögbe, $(BD$ az $\sphericalangle ABC$ szög szögfelezője, $D \in (AC)$, és $DE \parallel BC$, ahol $E \in (AB)$. Igazoljátok, hogy a $BED\Delta$ háromszög egyenlő szárú.



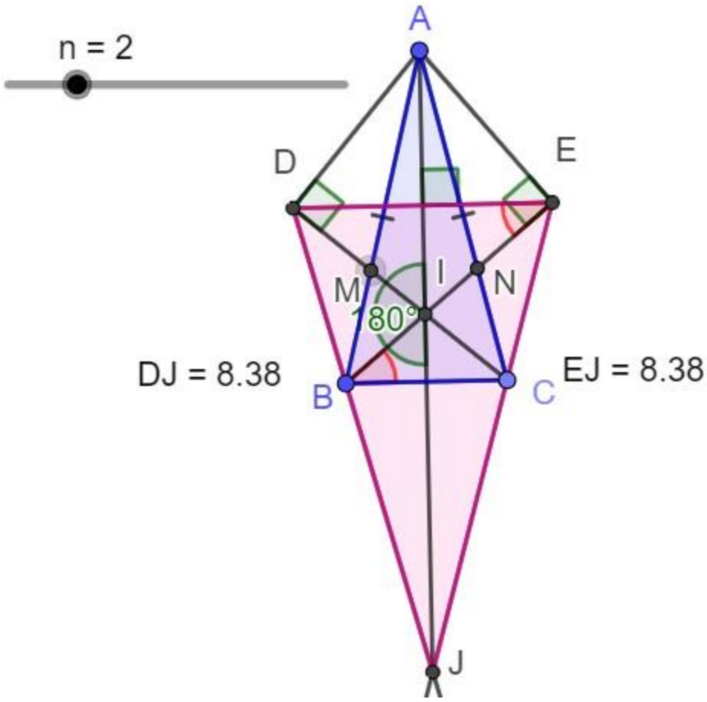
4. Legyen H az MNP háromszög ortocentruma, az $\sphericalangle M$ szög szögfelezője az N és P csúcsokból kiinduló magasságokat E és F pontokban metszi. Mutassátok ki, hogy a $HEF\Delta$ háromszög egyenlő szárú.



5. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = AC$, meghúzzuk az AD és BE magasságokat, ahol D és E a magasságok talppontját jelölik. Ha F a D pont AC egyenes szerinti szimmetrikusa, mutassátok ki, hogy a DE és AF egyenesek merőlegesek egymásra.

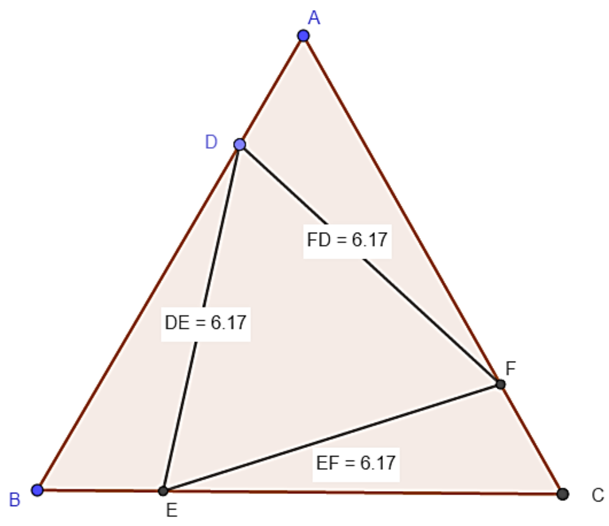


6. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög, amelyben $AB = AC \neq BC$. A háromszög AB és AC oldalain felvesszük az M és N pontokat úgy, hogy $BM = CN$. Az A pontból a CM és BN egyenesekre húzott merőlegesek talppontjait jelöljük a D és E pontokkal. Mutassátok ki, hogy:
   a) $AI \perp DE$, ahol $BE \cap CD = \{I\}$.
   b) A DEJ háromszög egyenlő szárú, ahol $\{J\} = BD \cap CE$.
   c) Az A, I, J pontok kollineárisak.
   d) $DE \parallel BC$.

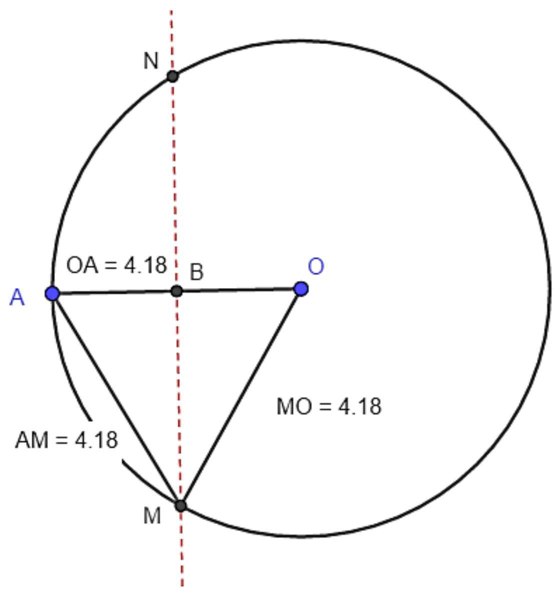

n = 2
A
D
E
M
I
N
180°
DJ = 8.38
EJ = 8.38
B
C
J

Az egyenlő oldalú háromszög

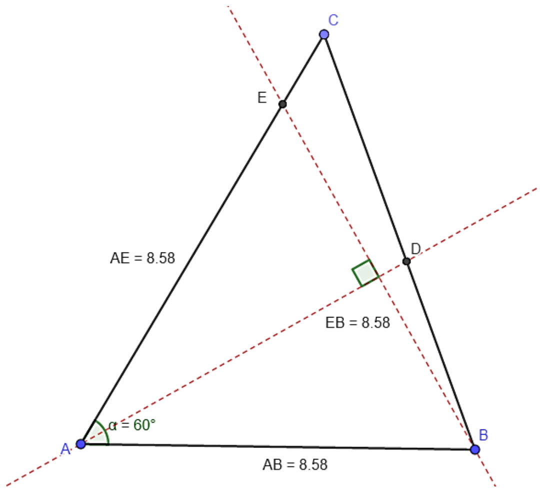
1. Az ABC háromszög oldalain felvesszük az E, D és F pontokat úgy, hogy $[AD] \equiv [BE] \equiv [CF]$. Igazoljátok, hogy a DEF háromszög egyenlő oldalú.



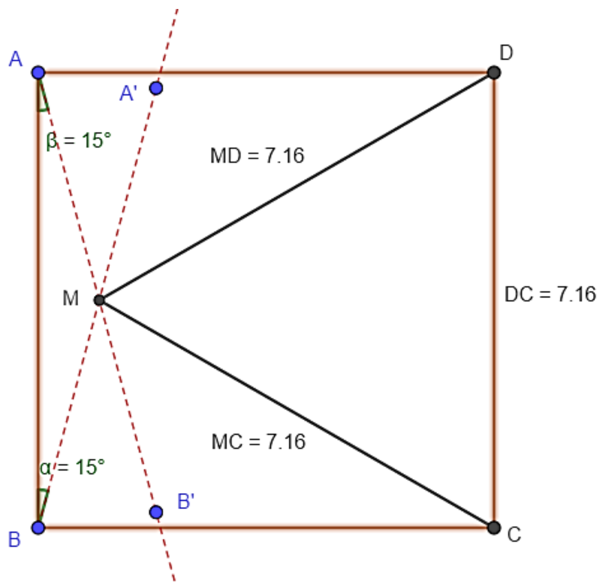
2. Legyen $[OA]$ a $C(O, r)$ kör sugara. Az $[OA]$ szakasz felezőmerőlegese a kört M és N pontokban metszi. Igazoljátok, hogy az $OAM\Delta$ egyenlő oldalú háromszög.



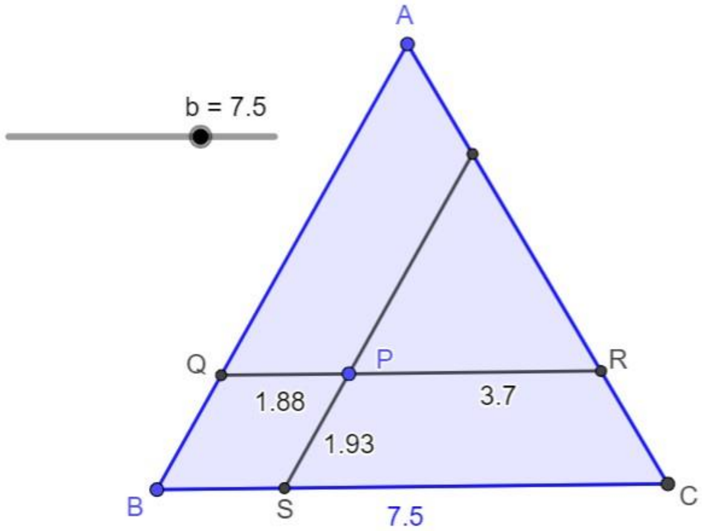
3. Az $ABC\Delta$ háromszögben $m(\sphericalangle BAC) = 60°$, $D \in (BC)$, $E \in (AC)$ úgy, hogy $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$, és $BE \perp AD$. Igazoljátok, hogy $ABE\Delta$ egyenlő oldalú háromszög.



4. Legyen M az $ABCD$ négyzet egy belső pontja úgy, hogy $m(\sphericalangle ABM) = m(\sphericalangle BAM) = 15°$. Igazoljátok, hogy az MCD háromszög egyenlő oldalú.



5. Legyen P az ABC egyenlő oldalú háromszög egy belső pontja, $QR \parallel BC$, $PS \parallel AB$, ahol P, Q, R és S a $[QR]$, $[AB]$, $[AC]$, és $[BC]$ szakaszok pontjai. Igazoljátok, hogy $PQ + PR + PS$ összeg konstans.



$$AB = AC = BC = 7.5$$

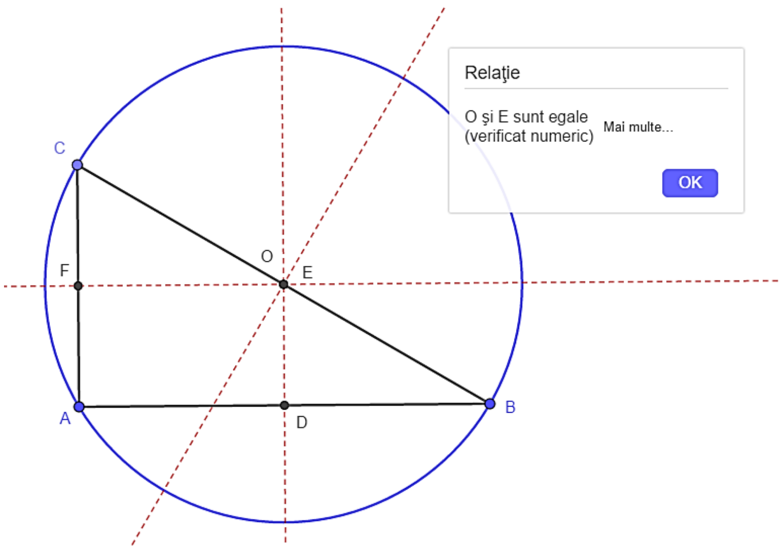
$$PQ + PR + PS = 1.88 + 3.7 + 1.93 = 7.5$$

GeoGebra segítségével bizonyított feladatok – VI. osztály

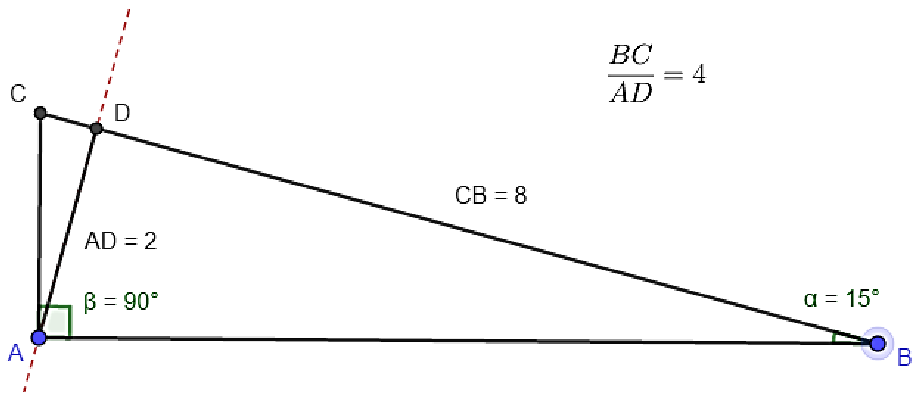
II. FÉLÉV

A derékszögű háromszög

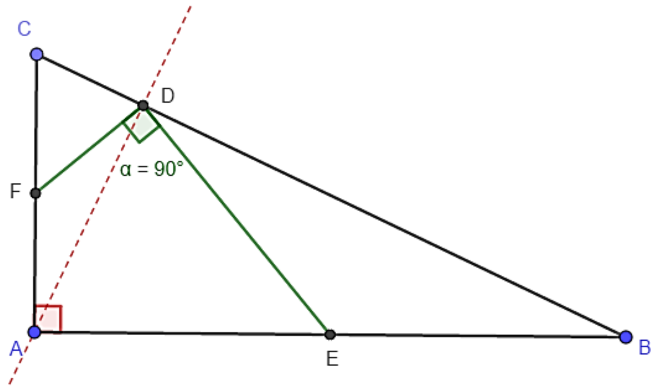
1. Igazoljátok, hogy egy derékszögű háromszög köré írt kör középpontja egybeesik az átfogó felezőpontjával.



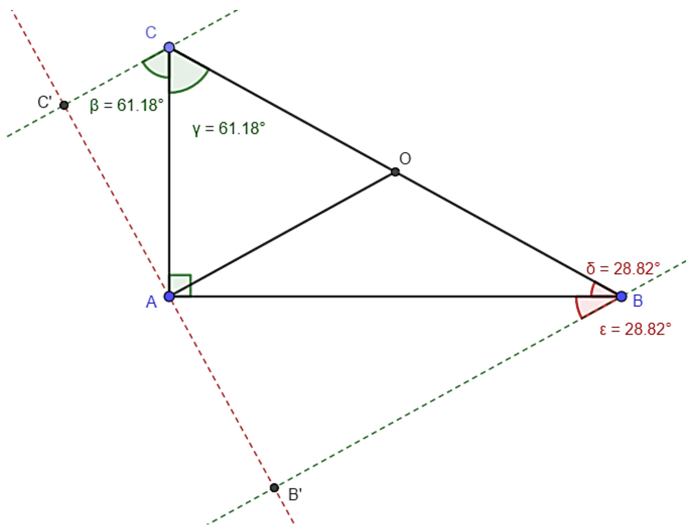
2. Az $ABC\Delta$ háromszögben $m(\sphericalangle BAC) = 90°$, $m(\sphericalangle ACB) = 15°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Mutassátok ki, hogy $AD = \frac{BC}{4}$.



3. Az $ABC\Delta$ háromszögben $m(\sphericalangle BAC) = 90°$, $AD \perp BC, D \in (BC)$, jelölje E és F az $[AB]$ és $[AC]$ oldalak felezőpontjait. Igazoljátok, hogy $ED \perp DF$.



4. Legyen ABC egy A-ban derékszögű háromszög, O pedig jelölje a $[BC]$ oldal felezőpontját. Az AO egyenes A pontjába állított merőleges, a B és C pontokon keresztül az AO egyeneshez húzott párhuzamosokat C' és B' pontokban metszi. Igazoljátok, hogy $[CA$ az $\sphericalangle OCC'$ szög, és $[BA$ pedig az $\sphericalangle OBB'$ szög szögfelezője.

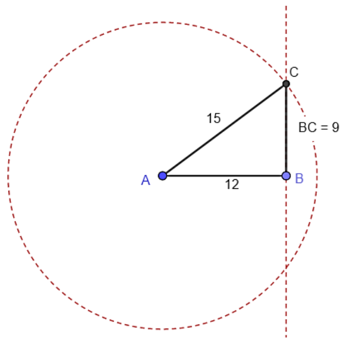


GeoGebra segítségével bizonyított feladatok – VI. osztály

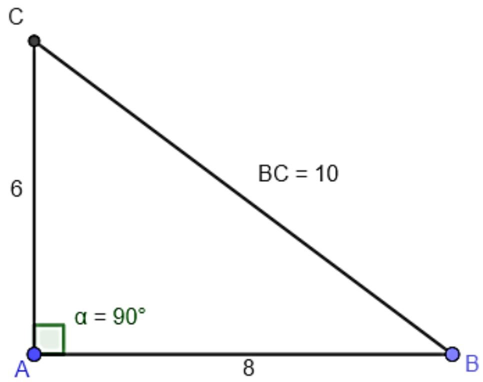
II. FÉLÉV

Pitagorasz tétele

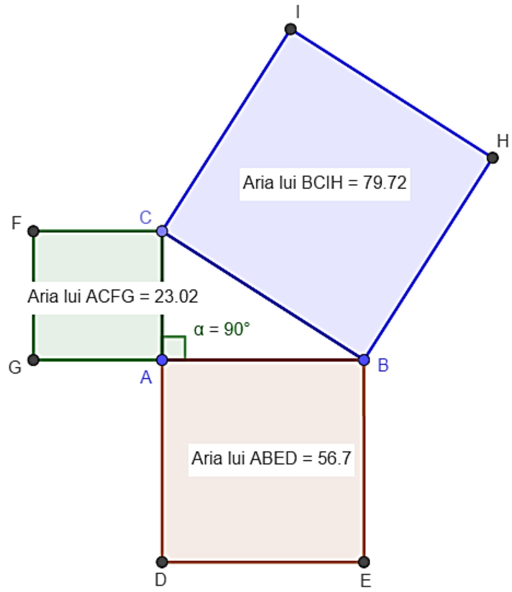
1. Egy derékszögű háromszög egyik befogója $12\ cm$, átfogója pedig $15\ cm$ hosszúságú. Határozzátok meg a másik befogó hosszát.



2. Egy 6 m magas oszlopot a föld felszínére merőlegesen helyeznek el. Az oszlop csúcsát egy az alapjától 8 m távolságra levő ponthoz szeretnék egy sodronnyal kikötni. Számítsátok ki a sodrony hosszát.

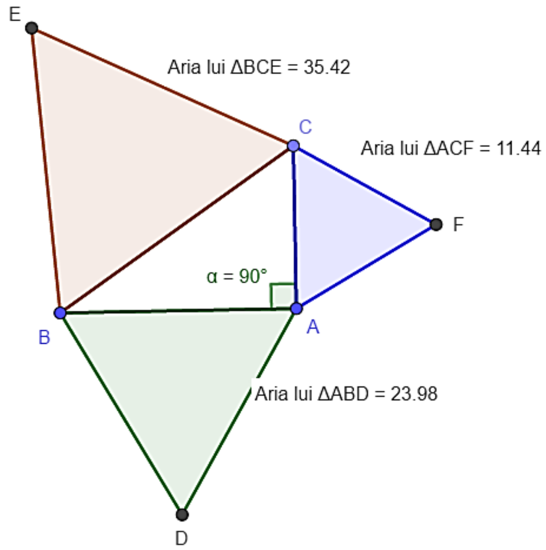


3. Adott az ABC derékszögű háromszög. Igazoljátok, hogy a befogókra épített négyzetek területe egyenlő az átfogóra épített négyzet területével.



$$A_{ABED} + A_{ACFG} = 56.7 + 23.02 = 79.72\ cm^2$$

4. Legyen ABC egy derékszögű háromszög. Igazoljátok, hogy a befogókra épített egyenlő oldalú háromszögek területének összege egyenlő az átfogóra épített egyenlő oldalú háromszög területével.



$A_{ABD} + A_{ACD} = 23.98 + 11.44 = 35.42\ cm^2$

Könyvészet

1. Perianu, M., Stănică, C., Smărăndoiu, Ș. *Matematică, clasa a V-a* Editura ART Educațional, București, 2018.
2. Zaharia, D., Zaharia, M., Peligrad, P., *Matematică, clasa a V-a*, Editura Paralela 45, București, 2019.