

Probleme de matematică demonstrate în aplicația GeoGebra

Clasa a VI a
Semestrul I



Material realizat în cadrul programului Digitaliada, cu contribuția profesorilor de matematică din școlile incluse în program, sub coordonarea Expertului Educațional Adina Roșca

Textul și ilustrațiile din acest material sunt licențiate de Fundația Orange conform termenilor și condițiilor licenței AttributionNonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0) care poate fi consultată pe pagina web <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>. Ilustrațiile din acest material reprezintă capturi din aplicațiile recomandate pentru utilizare. Coperta, ilustrațiile, mărcile înregistrate, logo-urile Fundația Orange, Digitaliada și orice alte elemente de marcă incluse pe copertă sunt protejate prin drepturi de proprietate intelectuală exclusive și nu pot fi utilizate fără consimțământul anterior expres al titularilor de drepturi.

Cuprins

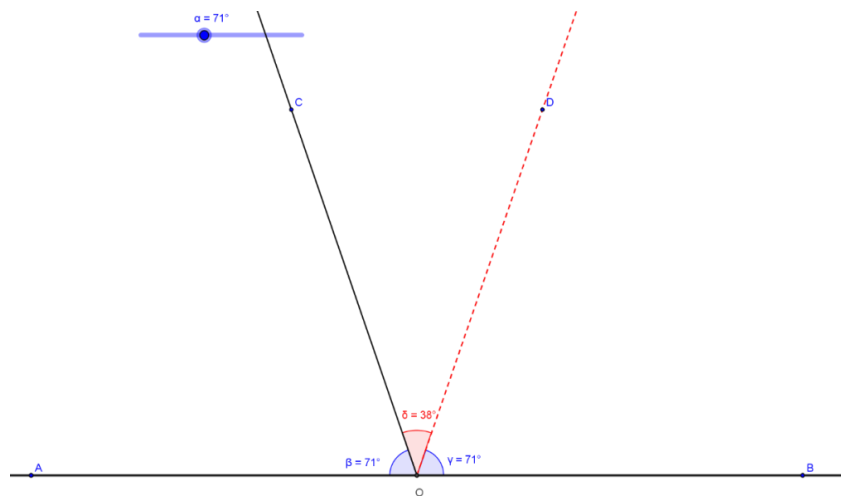
| | |
|---|-----------|
| UNGHIIURI | 2 |
| Unghiuri suplimentare, unghiuri complementare | 2 |
| Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi..... | 4 |
| Unghiuri opuse la vârf. Unghiuri formate în jurul unui punct..... | 5 |
| PERPENDICULARITATE | 7 |
| Drepte perpendiculare în plan. Drepte oblice. Distanța de la un punct la o dreaptă..... | 7 |
| Drepte perpendiculare în plan..... | 9 |
| Mediatoarea unui segment | 11 |
| PARALELISM | 13 |
| Drepte paralele; axioma paralelelor. Aplicații practice | 13 |
| Criterii de paralelism..... | 14 |
| CERCUL | 16 |
| Cerc; elemente în cerc | 16 |
| Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc | 17 |
| Pozițiile relative a două cercuri | 19 |
| TRIUNGHIUL | 22 |
| Triunghiul; clasificare; perimetru | 22 |
| Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior triunghiului..... | 23 |
| BIBLIOGRAFIE | 24 |

UNGHIIURI

Unghiuri suplementare, unghiuri complementare

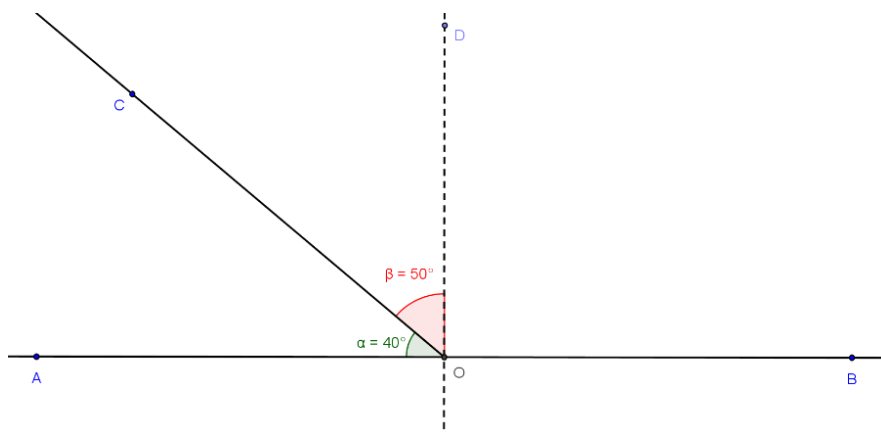
1. Diferența a două unghiuri suplementare este de 38° . Determinați măsurile unghiurilor.

Figură:



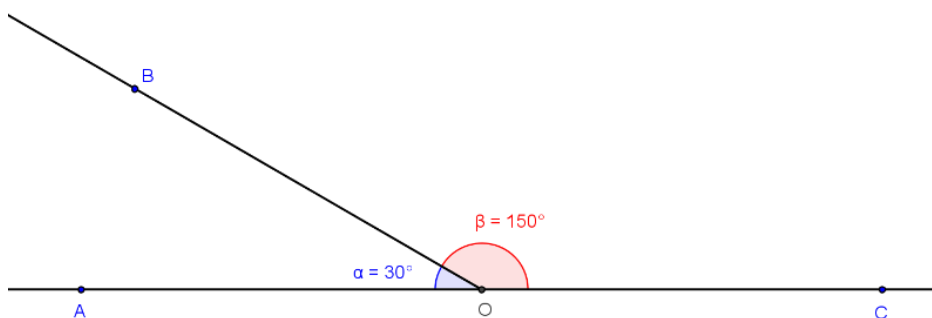
2. Diferența dintre suplementul și complementul unui unghi este de 40° . Determinați măsura unghiului.

Figură:



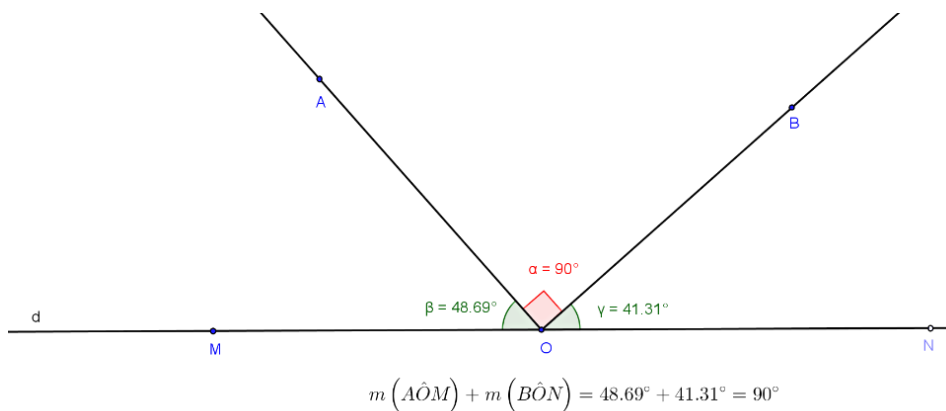
3. Aflați măsurile a două unghiuri suplementare dacă măsura unuia dintre ele este de 5 ori mai mare decât măsura celuilalt.

Figură:



4. Se consideră un unghi \widehat{AOB} cu măsura de 90° , punctul O aparținând unei drepte d față de care A și B sunt de aceeași parte. Se iau două puncte distincte M și N pe dreapta d, astfel încât O să aparțină segmentului MN, iar A și M să fie pe aceeași parte a dreptei OB. Demonstrați că unghiurile \widehat{AOM} și \widehat{BON} sunt complementare.

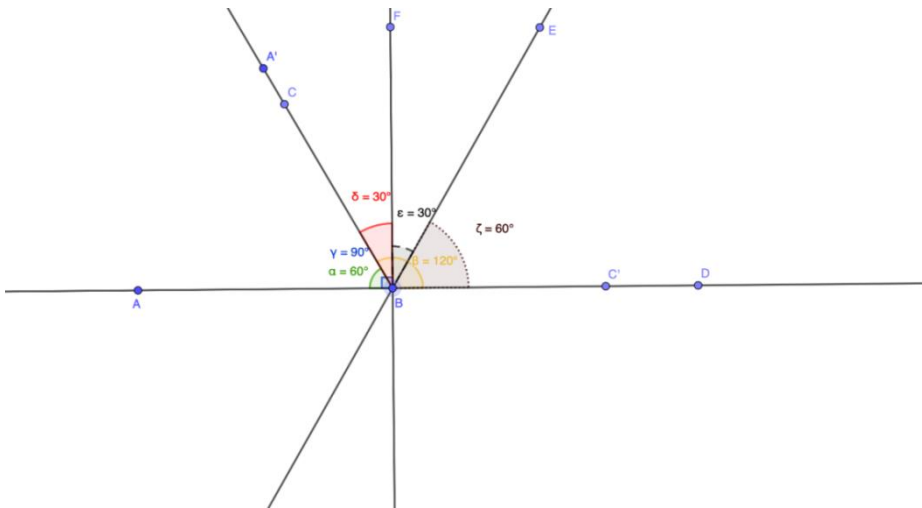
Figură:



Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi

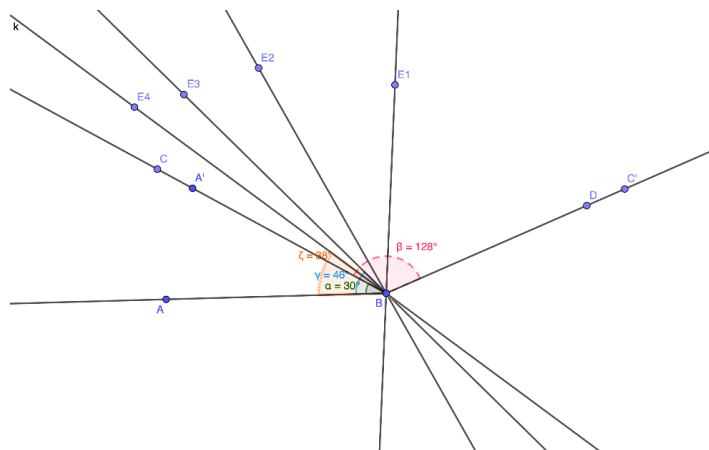
1. Unghiurile $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle CBD$ sunt adiacente suplementare. $[BE$ e bisectoarea unghiului $\sphericalangle CBD$, $[BF$ e bisectoarea unghiului $\sphericalangle CBE$ și $AB \perp BF$. Arătați că $m\angle ABC = 60^\circ$.

Figură:



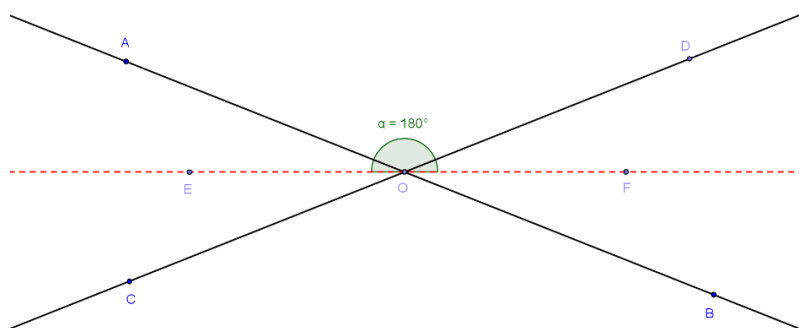
2. Unghiurile adiacente $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle CBD$ au măsurile de 30° , respectiv 128° . $[BE_1$ e bisectoarea unghiului $\sphericalangle CBD$, $[BE_2$ e bisectoarea unghiului $\sphericalangle CBE_1$, $[BE_3$ e bisectoarea unghiului $\sphericalangle CBE_2$ și așa mai departe. Aflați cea mai mare valoare a lui n astfel că $m\angle ABE_n > 40^\circ$.

Figură:



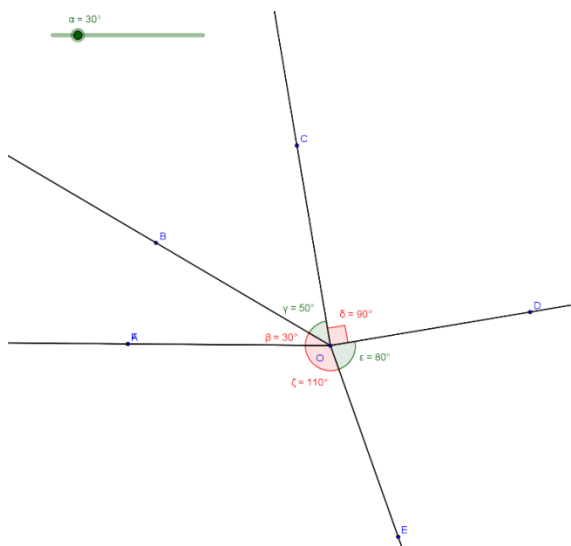
1. Demonstrați că bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf sunt două semidrepte opuse.

Figură:



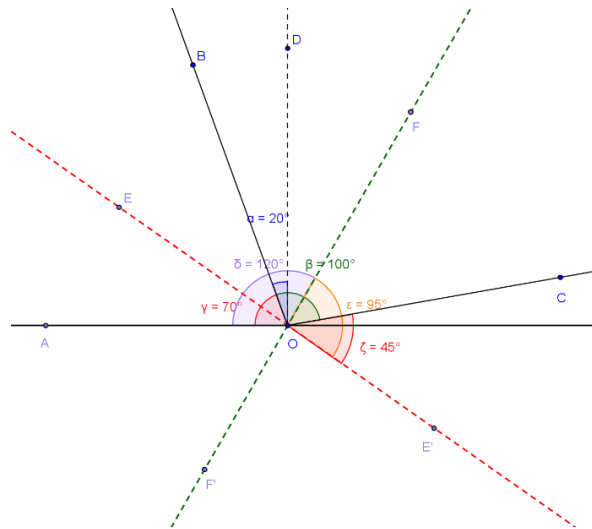
2. În jurul unui punct O se consideră cinci unghiuri care nu au puncte interioare comune, cu măsurile $\alpha, 2\alpha - 10^\circ, 2\alpha + 30^\circ, 3\alpha - 10^\circ, 4\alpha - 10^\circ$. Calculați măsurile unghiurilor.

Figură:

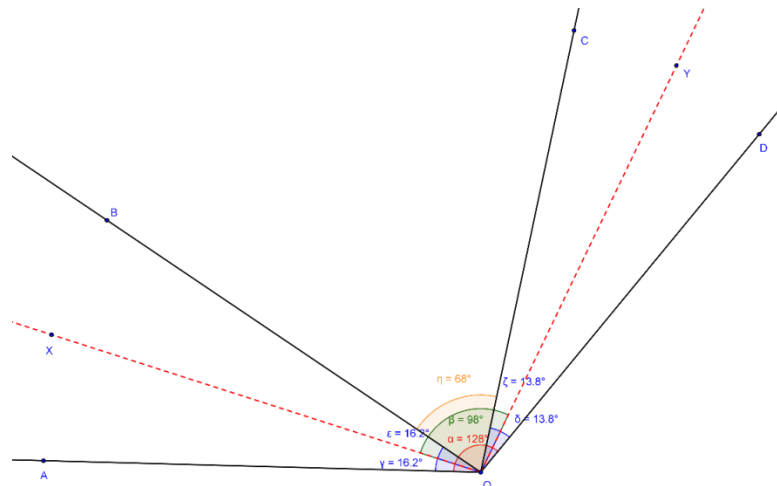


Semestrul I

3. Fie $A\hat{O}B$ și $B\hat{O}C$ două unghiuri adiacente. Dacă complementul unghiului $A\hat{O}B$ este de 20° , măsura unghiului $m(B\hat{O}C) = 100^\circ$, $[OE$ este bisectoarea unghiului $A\hat{O}B$, iar $[OE'$ semidreapta opusă acestuia, $[OF$ este bisectoarea unghiului $C\hat{O}B$, iar $[OF'$ semidreapta opusă acestuia, determinați măsurile unghiurilor $A\hat{O}B$, $A\hat{O}F$, $F\hat{O}E'$ și $C\hat{O}E'$.
Figură:



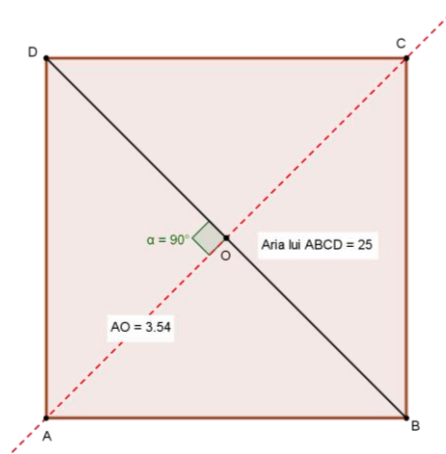
4. Fie unghiurile $m(A\hat{O}D) = 128^\circ$ și $m(X\hat{O}Y) = 98^\circ$, astfel încât $[OB \subset \text{int}(A\hat{O}D)$, $[OC \subset \text{int}(B\hat{O}D)$, $[OX$ fiind bisectoarea unghiului $A\hat{O}B$, iar $[OY$ bisectoarea unghiului $C\hat{O}D$. Determinați măsura unghiului $B\hat{O}C$.
Figură:



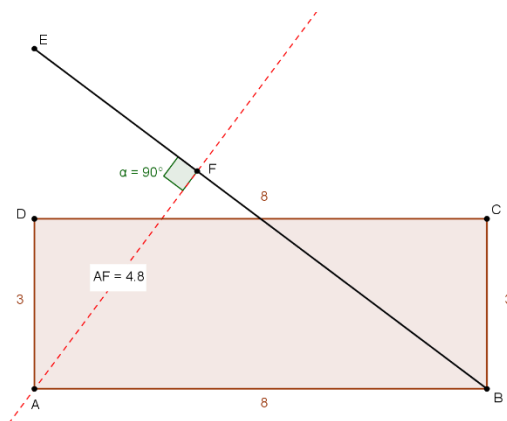
PERPENDICULARITATE

Drepte perpendiculare în plan. Drepte oblice. Distanța de la un punct la o dreaptă

1. Construiți pătratul ABCD care are aria egală cu 25 cm^2 , și apoi, determinați distanța de la punctul A la dreapta BD.

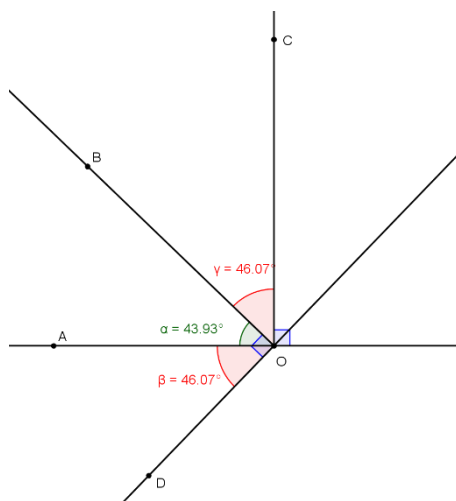


2. Construiți dreptunghiul ABCD cu $AB=8 \text{ cm}$ și $BC=3 \text{ cm}$. Dacă notăm cu E simetricul punctului A față de punctul D, determinați distanța de la punctul A la dreapta BE.

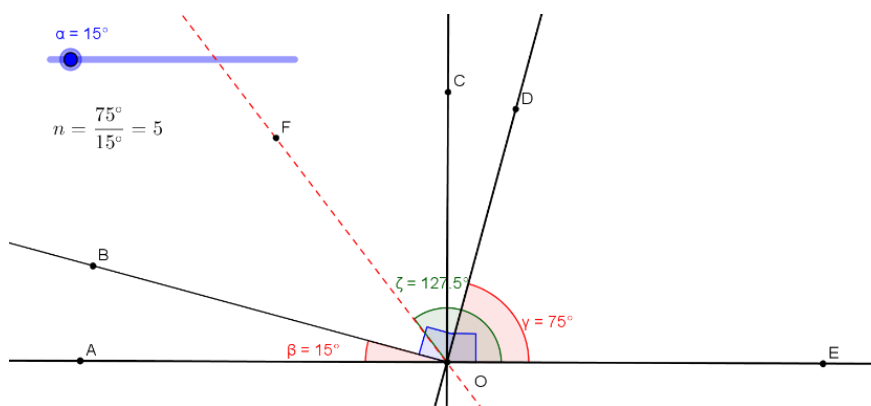


Semestrul I

3. Se consideră unghiurile complementare și adiacente $A\hat{O}B$ și $B\hat{O}C$. În semiplanul mărginit de dreapta OC și care conține punctul A construim semidreapta OD , astfel încât $OD \perp OB$. Arătați că $A\hat{O}D \equiv B\hat{O}C$.

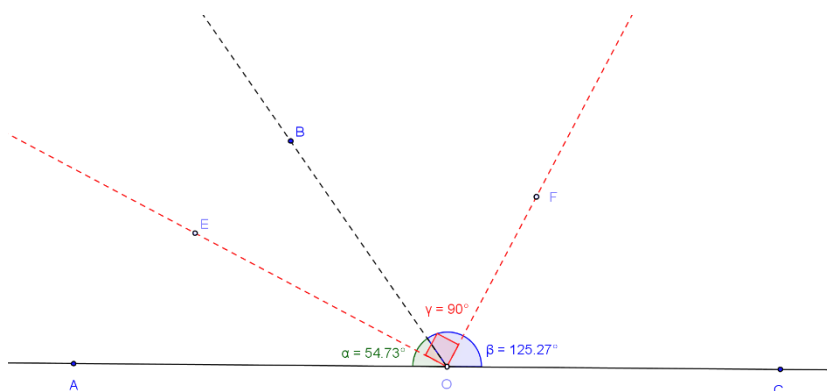


4. Unghiul $A\hat{O}B$ este ascuțit. Prelungim latura OA cu semidreapta OE . De aceeași parte cu latura OB se duc $OC \perp OA$ și $OD \perp OB$. Știind că $m(D\hat{O}E) = 5 \cdot m(A\hat{O}B)$, să se calculeze măsurile unghiurilor $D\hat{O}E$ și $E\hat{O}F$, unde (OF este bisectoarea unghiului $A\hat{O}D$).

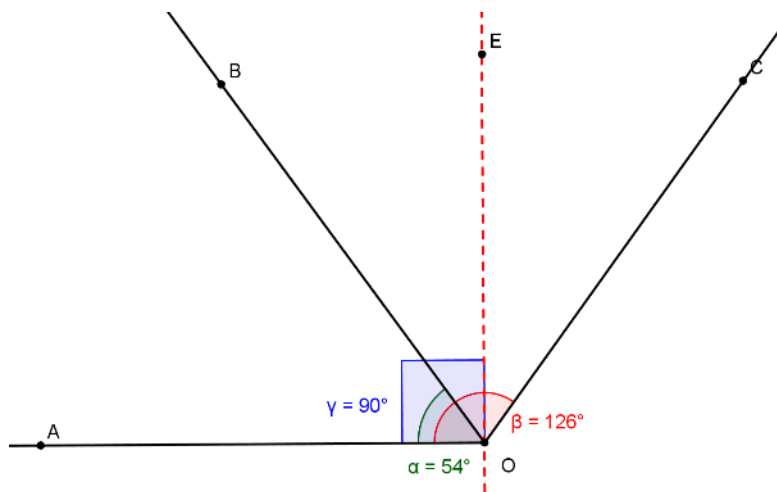


Drepte perpendiculare în plan

1. Unghiurile \widehat{AOB} și \widehat{BOC} sunt adiacente suplementare. Fie $[OE]$ bisectoarea unghiului \widehat{AOB} iar $[OF]$ bisectoarea unghiului \widehat{BOC} . Demonstrați că $OE \perp OF$

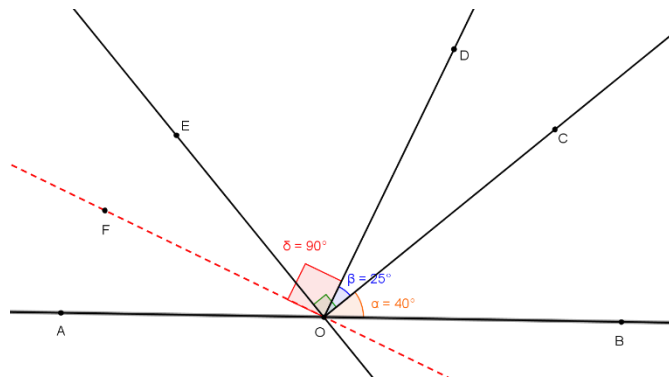


2. Fie \widehat{AOB} și \widehat{AOC} două unghiuri suplementare neadiacente, cu $m(\widehat{AOB}) = 54^\circ$. Dacă $[OE]$ este bisectoarea unghiului \widehat{BOC} , arătați că $OE \perp OA$.

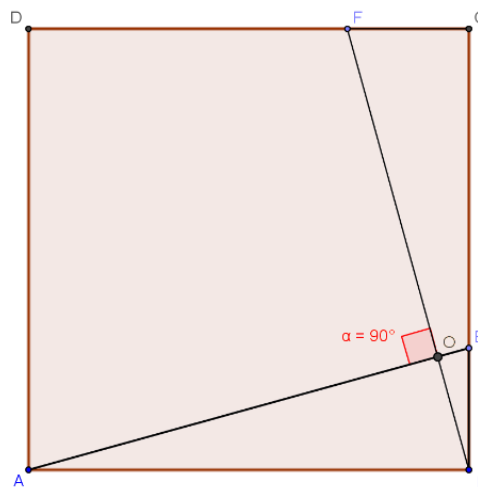


Semestrul I

3. Fie A, O, B trei puncte coliniare. Pe aceeași parte a dreptei AB se situează punctele E, D și C astfel încât $EO \perp OC$, ($OD \subset \text{int}(E\hat{O}C)$), $m(\widehat{BOC}) = 40^\circ$ și $m(\widehat{COD}) = 25^\circ$. Demonstrați că $DO \perp OF$, unde (OF este bisectoarea unghiului $E\hat{O}A$).

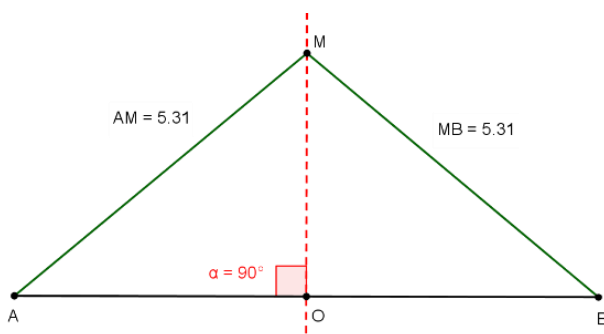


4. Construiți pătratul $ABCD$ și punctele $E \in BC$ și $F \in CD$, astfel încât $BE \equiv CF$. Demonstrați că $AE \perp CF$.

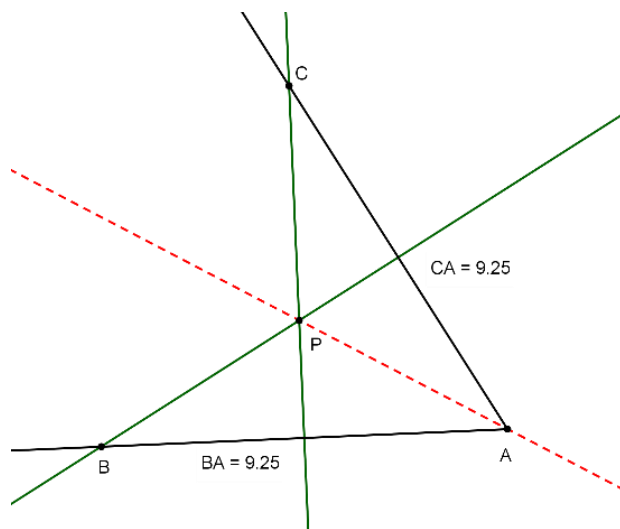


Mediatoarea unui segment

1. Demonstrați că orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de extremitățile acestuia.

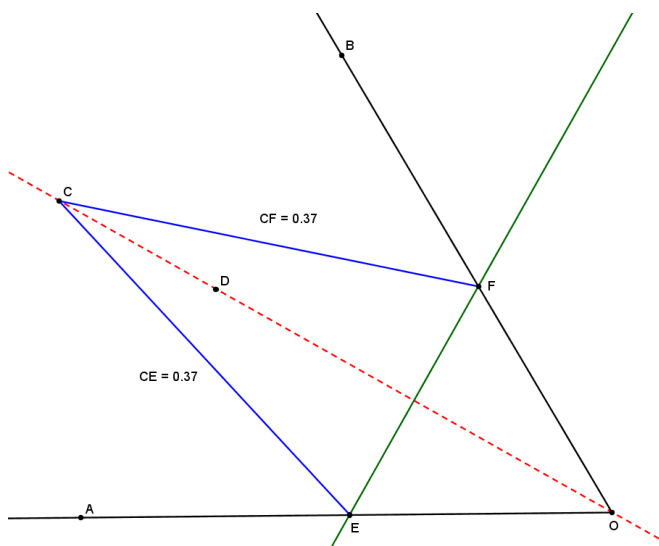


2. Fie unghiul $\hat{B}AC$, iar mediatoarele segmentelor $[AB]$ și $[AC]$ se intersectează în punctul P. Demonstrați că, dacă P se situează pe bisectoarea unghiului $\hat{B}AC$, atunci $[AB] \equiv [AC]$.

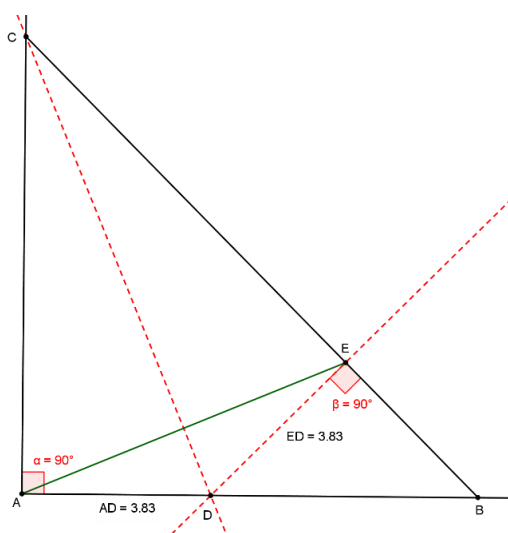


Semestrul I

3. Se consideră punctul D pe bisectoarea $(OC$ a unghiului $A\hat{O}B$. Dacă mediatoarea segmentului $[OD]$ intersectează semidreptele $(OA$ și $(OB$ în punctele E , respectiv F , demonstrați că OC este mediatoarea segmentului $[EF]$.

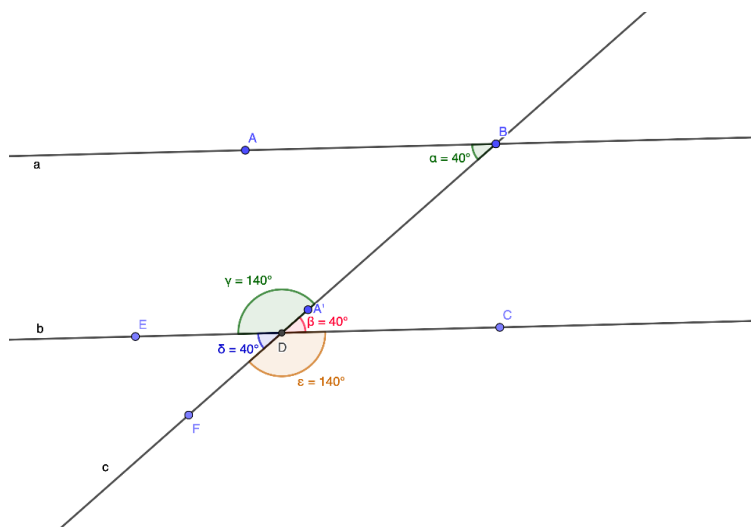


4. Fie $m(\hat{BAC}) = 90^\circ$, CD bisectoarea unghiului $A\hat{C}B$, $CD \cap AB = \{D\}$ și $DE \perp BC$, $DE \cap BC = \{E\}$. Arătați că punctul D se află pe mediatoarea segmentului $[AE]$



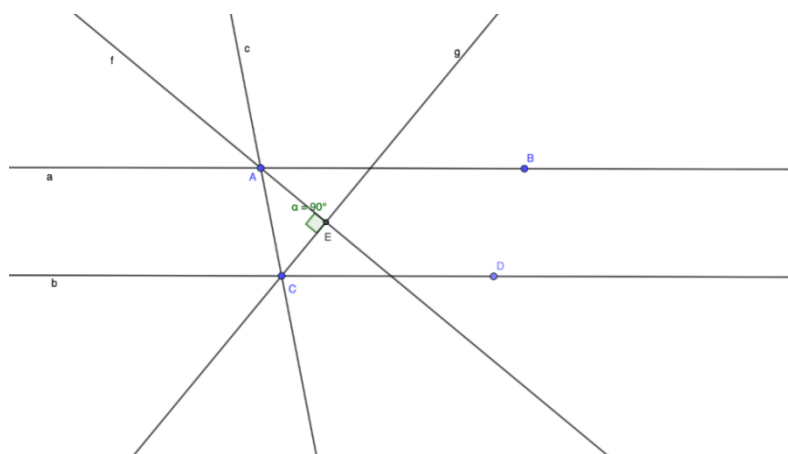
1. Dreptele a și b sunt paralele iar secanta c formează cu dreapta a un unghi intern cu măsura de 40° . Aflați măsurile unghiurilor formate de dreptele b și c .

Figură:



2. Fie dreptele a și b , cu $a \parallel b$ și secanta c care intersectează pe a în A și pe b în C . Fie punctele B pe dreapta a și D pe dreapta b , situate în același semiplan față de dreapta c . Arătați că bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ e perpendiculară pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACD$.

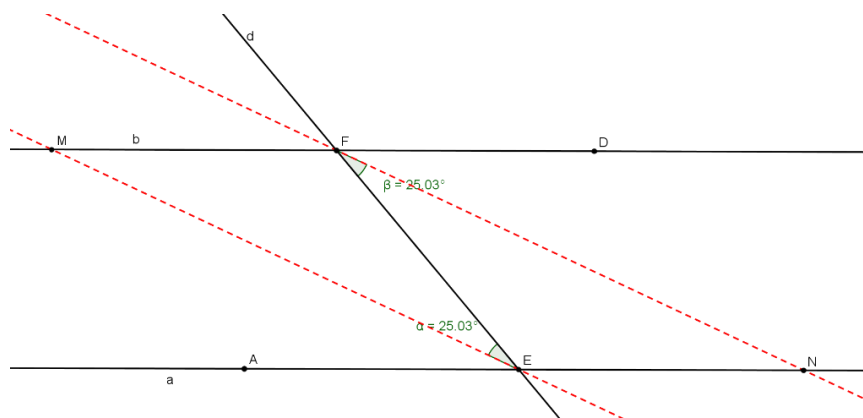
Figură:



Criterii de paralelism

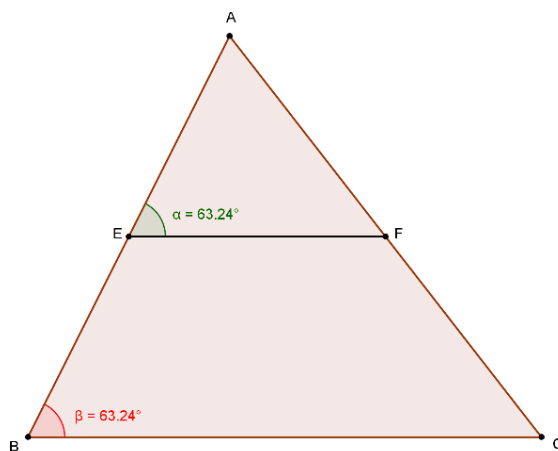
1. Fie a și b două drepte paralele. Secanta d intersectează dreptele în punctele E respective F . Demonstrați că, bisectoarele unghiurilor alterne interne sunt paralele.

Figură:



2. Fie punctele E și F mijloacele laturilor AB respectiv AC al triunghiului ABC . Demonstrați că $EF \parallel BC$.

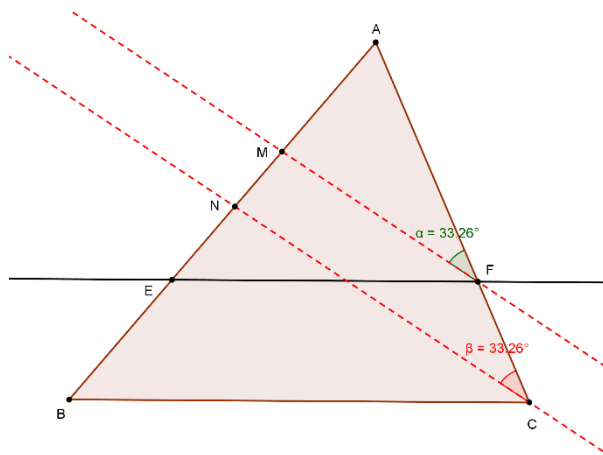
Figură:



Semestrul I

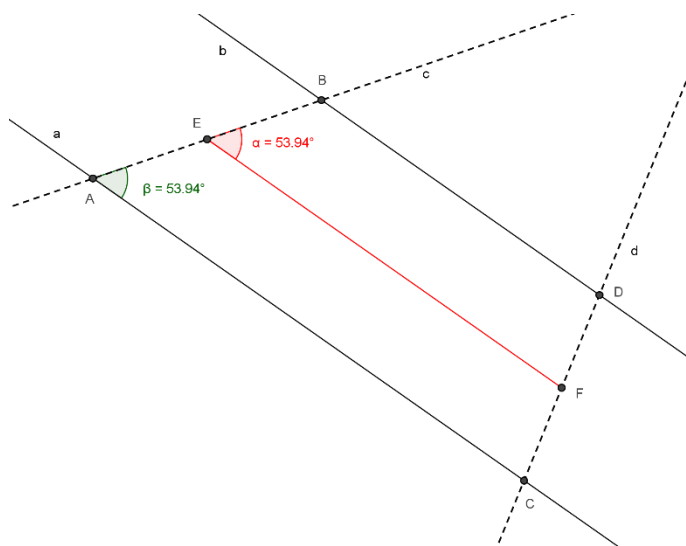
3. Fie punctele E și F două puncte pe laturile AB respectiv AC al triunghiului ABC, astfel încât $EF \parallel BC$. Demonstrați că bisectoarele unghiurilor $\hat{A}CB$ și $\hat{A}FE$ sunt paralele.

Figură:



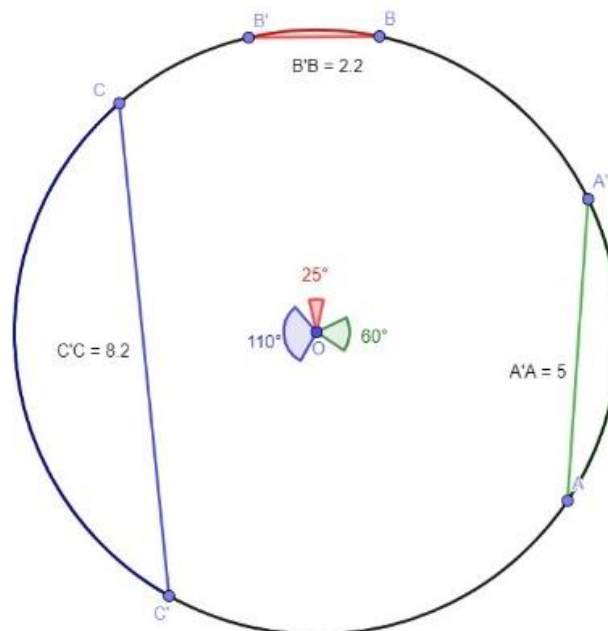
4. Dreptele paralele a și b intersectează secantele c și d în punctele A și B , respectiv C și D . Demonstrați că segmentul format de mijloacele segmentelor AB și CD este paralel cu dreptele a și b .

Figură:



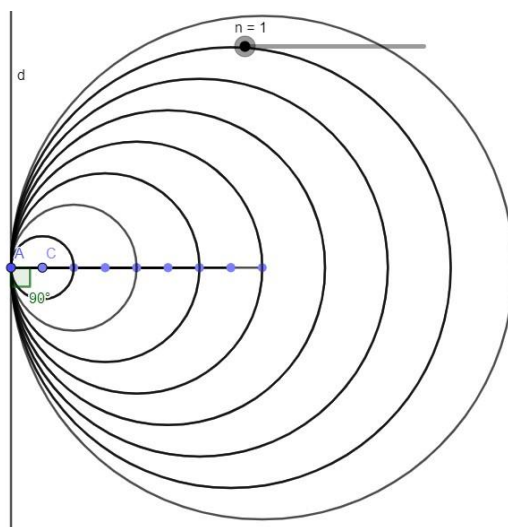
Cerc; elemente în cerc

1. Desenează un cerc de centru O și rază 5 cm. Reprezintă pe acest cerc un arc cu măsura de 60° , unul cu măsura de 25° și unul cu măsura de 110° . Marchează coardele corespunzătoare acestor arce și stabilește care dintre ele are lungimea cea mai mare și care are lungimea cea mai mică.

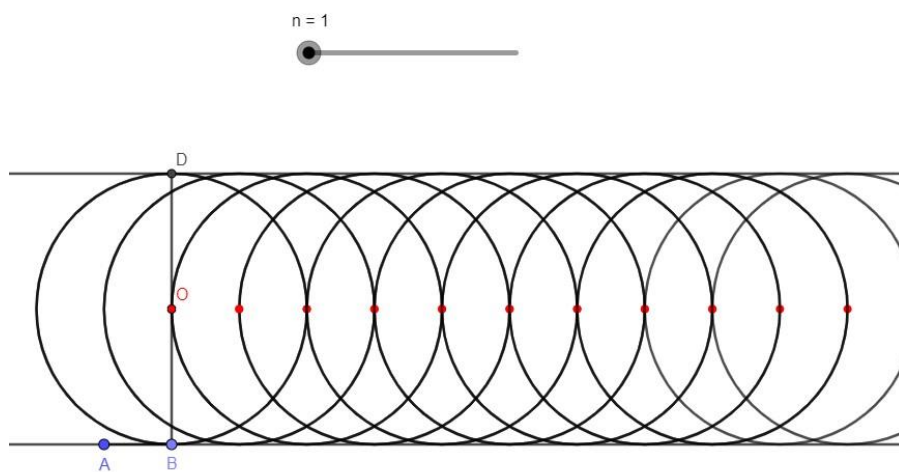


Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc

1. a) Se dă o dreaptă d și A un punct al ei. Câte cercuri care să treacă prin A și să fie tangente la dreapta d există? Ce formează centrele acestor cercuri?

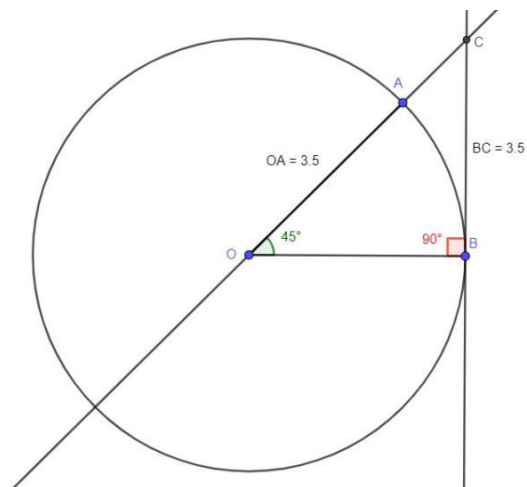


b) Se dau două drepte paralele. Câte cercuri există, care să fie tangente la ambele drepte? Ce formează centrele lor?

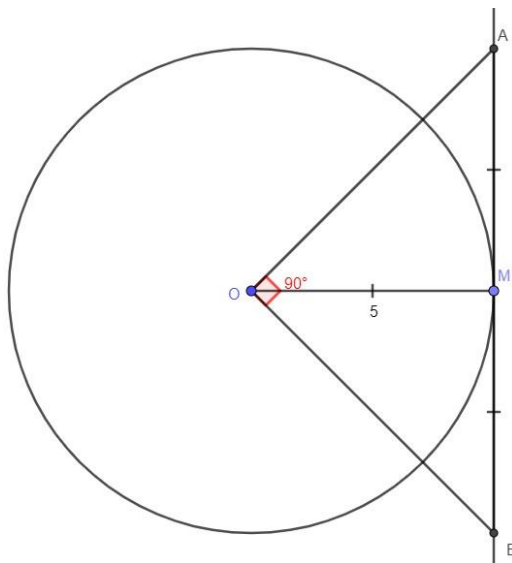


Semestrul I

2. Într-un cerc se duc două raze, OA și OB , care formează un unghi de 45° . În punctul B se duce tangenta la cerc și se notează cu C intersecția ei cu dreapta OA . Să se afle $m(\sphericalangle CBO)$ și să se compare lungimile segmentelor BC și OA .



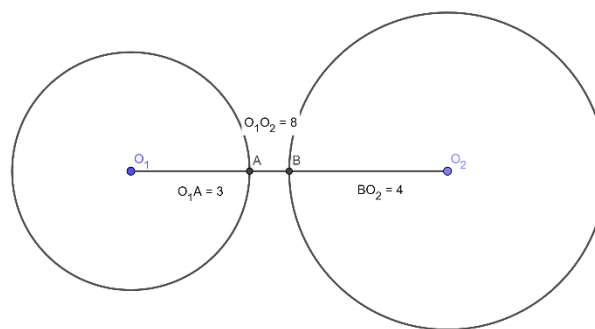
3. Fie cercul $C(O, 5)$ și M un punct pe cerc. Pe tangenta în M la cerc se consideră punctele A și B , astfel încât $MA = MB = OA$. Să se calculeze măsura unghiului AOB .



1. Construiește cercurile $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$, în următoarele cazuri și precizează poziția unuia față de celălalt:

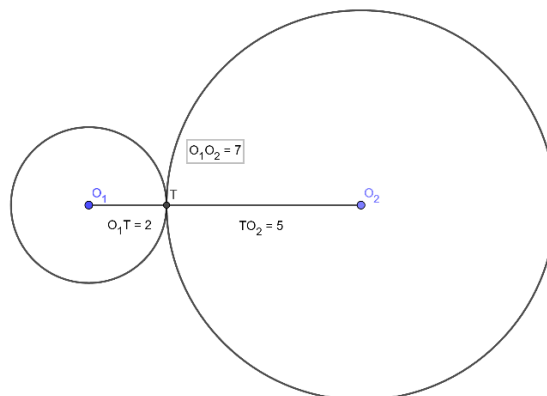
a) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 4$ cm și $O_1O_2 = 8$ cm

Figură:



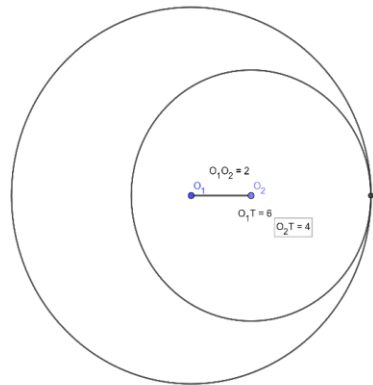
b) $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 5$ cm și $O_1O_2 = 7$ cm

Figură:

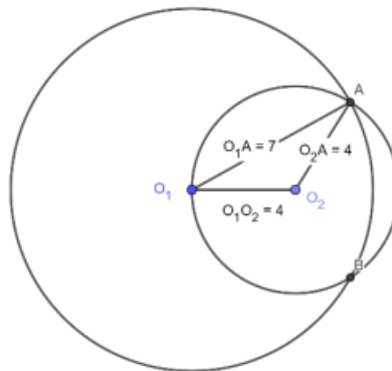


c) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 4$ cm și $O_1O_2 = 2$ cm

Figură:



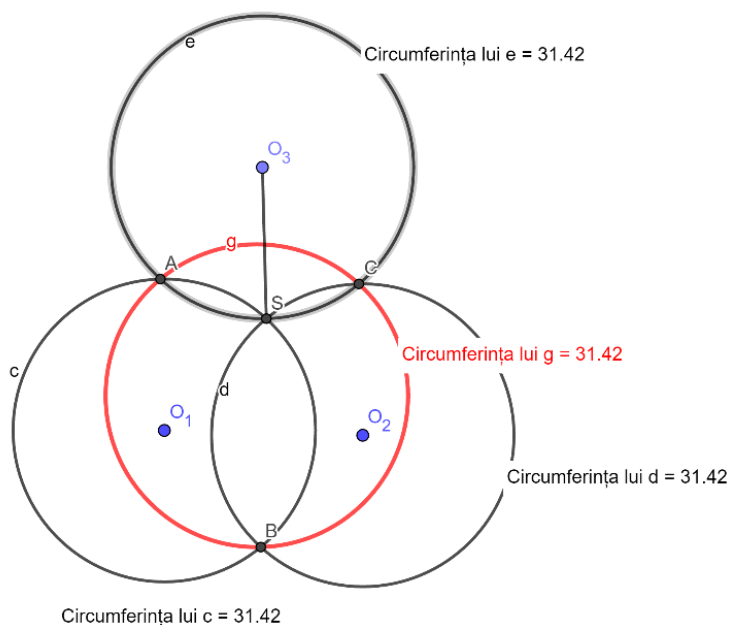
d) $r_1 = 7$ cm, $r_2 = 2$ cm și $O_1O_2 = 4$ cm



2. Problema monedei de 5 lei - Țițeica - ușor modificată

Trei cercuri având razele egale se intersectează într-un punct. Luându-se două câte două, se obțin încă trei puncte de intersecție, astfel încât cercul determinat de ele are aceeași circumferință cu cercurile date inițial.

Figură:

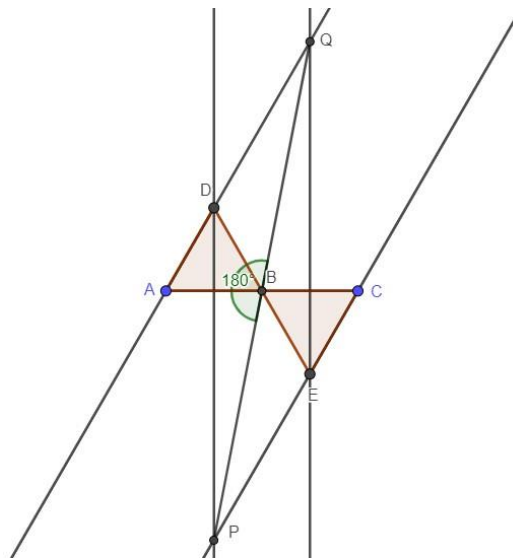


Semestrul I

TRIUNGHIU

Triunghiul; clasificare; perimetru

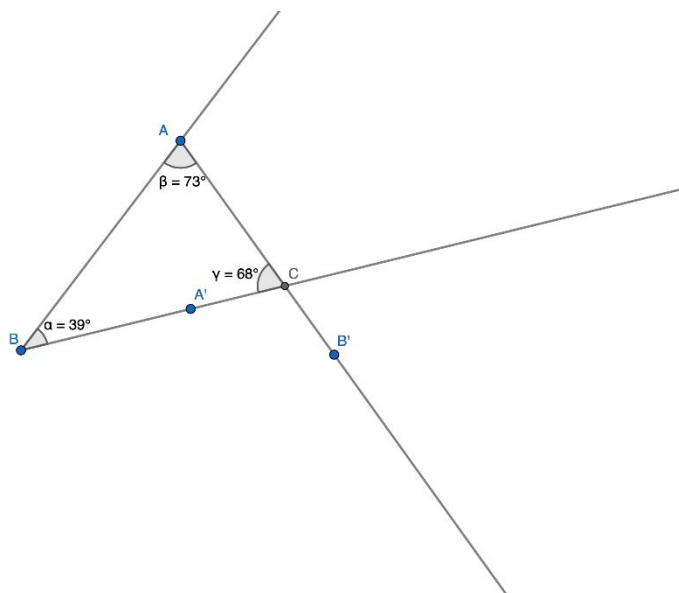
1. Fie B mijlocul segmentului AC și D și E două puncte situate de o parte și de alta a dreptei AC , astfel încât triunghiurile ABD și BCE să fie echilaterale. Dacă perpendiculara din D pe AB intersectează dreapta EC în P și perpendiculara din E pe AB intersectează pe AD în Q , arătați că punctele P , B și Q sunt coliniare.



Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior triunghiului

1. Un triunghi are două unghiuri de măsuri 39° și 73° . Calculați măsura celui de al treilea unghi al triunghiului.

Figură:



1. Hollinger A. Geometrie, *Manual pentru clasa a VI-a*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1977.
2. Supliment *Gazeta Matematică*, Martie 2019.
3. Sorin Peligrad, Ioan Șerdean. Adrian Țurcanu, *Matematică: Algebră, Geometrie - clasa a VI-a / standard*, Editura Paralela 45.
4. Dan, Maria Zaharia, *Matematică: algebră, geometrie - clasa a VI-a / Consolidare*, Editura Paralela 45.
5. Ion Tudor, *Matematică: algebră, geometrie - caiet de lucru clasa a VI-a*, Editura Paralela 45.
6. Cristian Petru Pop, Simona Maria Pop, *Olimpiada satelor din România*, Editura Nomina.
7. Ioana Monalisa Manea, Cristina Neagoe, *Culegere de probleme pentru clasa a VI-a*, Editura Mediaprint.