

Probleme de matematică demonstrate în aplicația GeoGebra

**Clasa a VIII a
Semestrul I**



Material realizat în cadrul programului Digitaliada, cu contribuția profesorilor de matematică din școlile incluse în program, sub coordonarea Expertului Educațional Adina Roșca

Textul și ilustrațiile din acest material sunt licențiate de Fundația Orange conform termenilor și condițiilor licenței AttributionNonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0) care poate fi consultată pe pagina web <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>. Ilustrațiile din acest material reprezintă capturi din aplicațiile recomandate pentru utilizare. Coperta, ilustrațiile, mărcile înregistrate, logo-urile Fundația Orange, Digitaliada și orice alte elemente de marcă incluse pe copertă sunt protejate prin drepturi de proprietate intelectuală exclusive și nu pot fi utilizate fără consimțământul anterior expres al titularilor de drepturi.

Cuprins

PUNCTE, DREPTE, PLANE, CORPURI	2
Puncte, drepte, plane: convenții de desen și notație.....	2
Determinarea dreptej; determinarea planului	4
Piramida: descriere și reprezentare; tetraedrul.....	6
Prisma: descriere și reprezentare; paralelipipedul dreptunghic; cubul.....	7
RELAȚII ÎNTRE PUNCTE, DREPTE ȘI PLANE	9
Dreaptă perpendiculară pe un plan; distanța de la un punct la un plan; înălțimea piramidei.....	9
Secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate	11
PROIECȚII ORTOGONALE PE UN PLAN	14
Proiecții ortogonale de puncte, de segmente de dreaptă și de drepte pe un plan	14
Unghiul dintre o dreaptă și un plan; lungimea proiecției unui segment.....	16
Teorema celor trei perpendiculare	18
Calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței dintre două plane paralele.....	21
Unghi diedru. Unghiul a două plane.....	23
BIBLIOGRAFIE	25

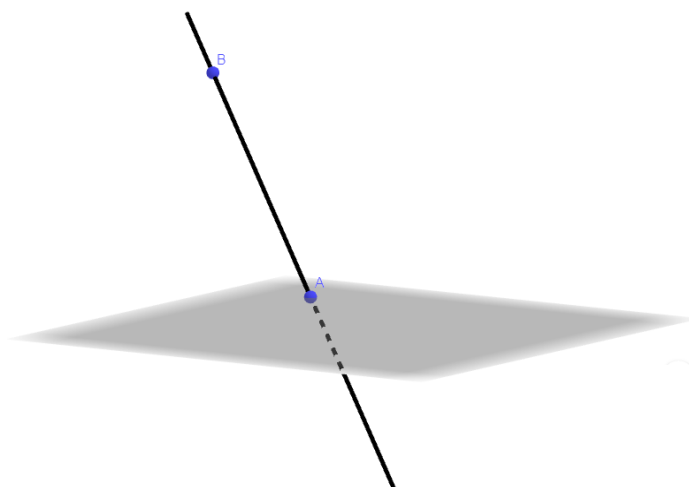
Semestrul I

PUNCTE, DREPTE, PLANE, CORPURI

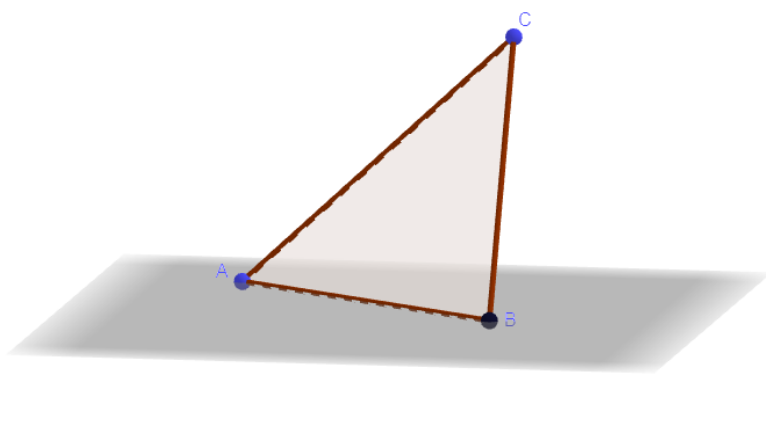
Puncte, drepte, plane: convenții de desen și notație

1. Reprezentați printr-un desen:

a) Planul α , punctele $A \in \alpha, B \notin \alpha$ și dreapta AB .



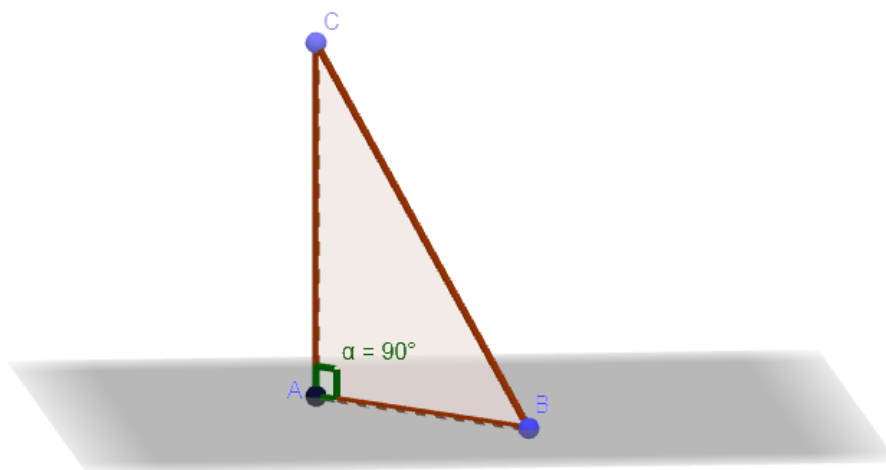
b) Planul α , punctele $A \in \alpha, B \in \alpha, C \notin \alpha$ și triunghiul ABC .



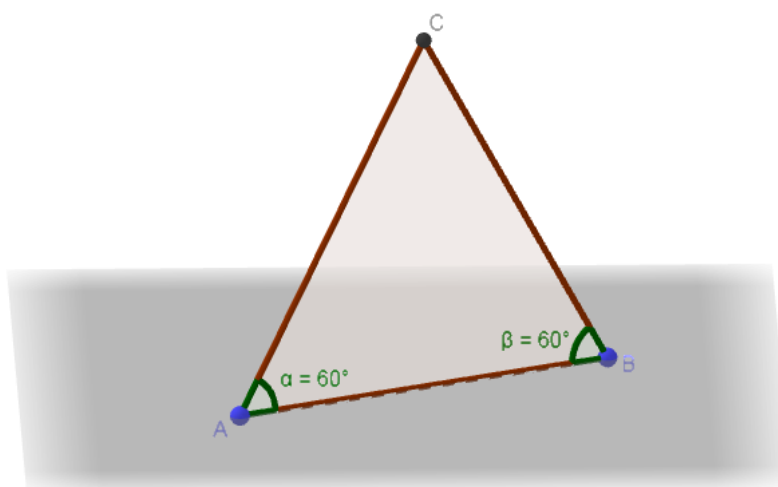
Semestrul I

2. Reprezentați printr-un desen:

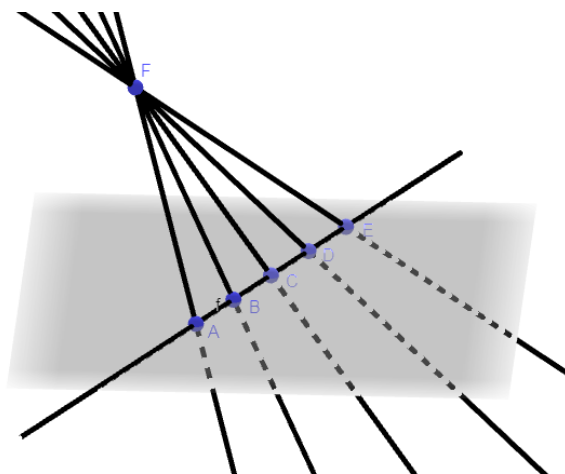
a) Planul α , triunghiul ABC , cu $[AB] \subset \alpha$ și $C \notin \alpha$, iar $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$.



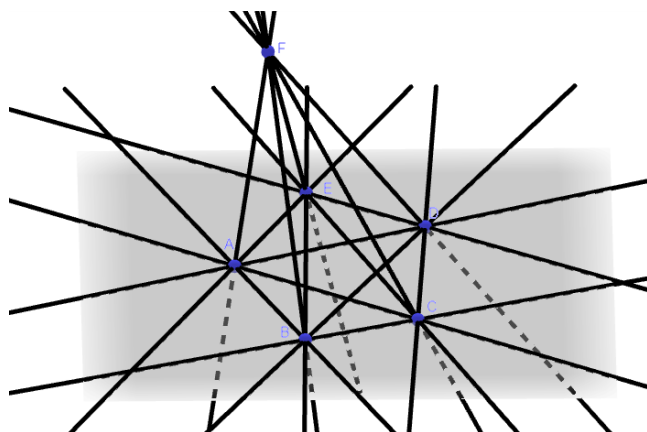
b) Planul α , triunghiul echilateral ABC , cu $[AB] \subset \alpha$ și $C \notin \alpha$.



1. Într-un plan sunt date 5 puncte distincte A, B, C, D, E și un punct F care nu aparține planului.
- a) Care este cel mai mic număr de drepte care să treacă prin cel puțin două dintre ele?
Punctele A, B, C, D, E sunt coliniare, deci s-au format 6 drepte.

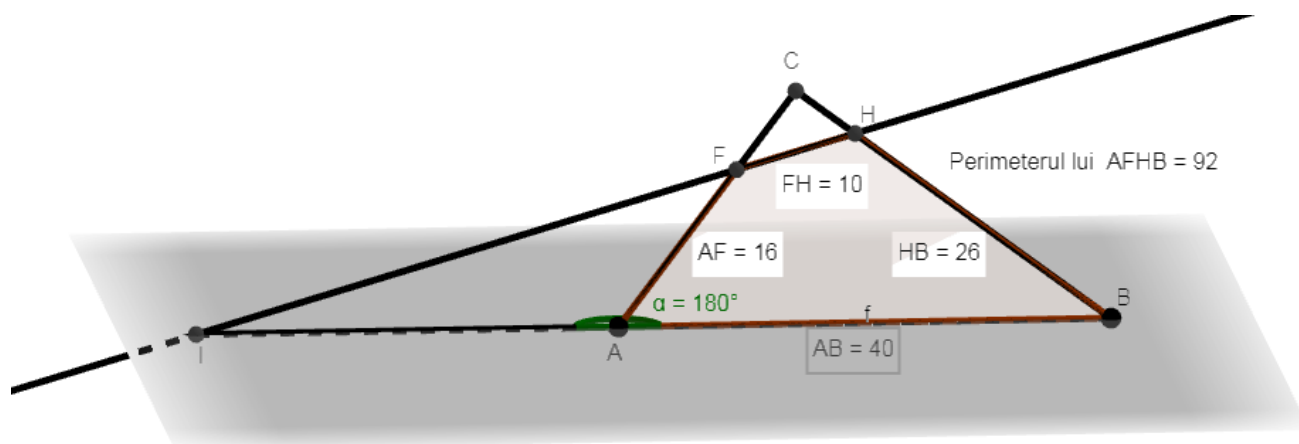


- b) Dar cel mai mare număr?
Punctele A, B, C, D, E nu sunt coliniare, deci s-au format 15 drepte.

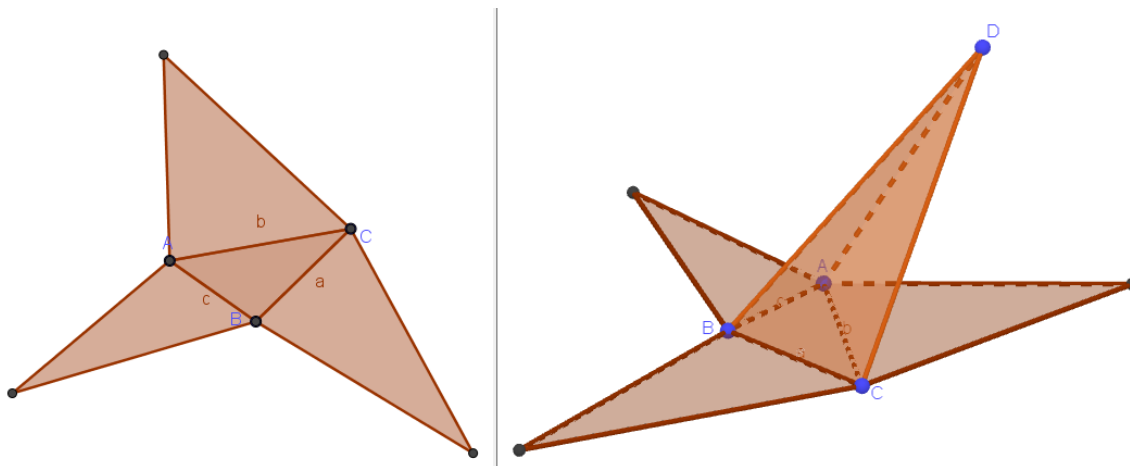


Semestrul I

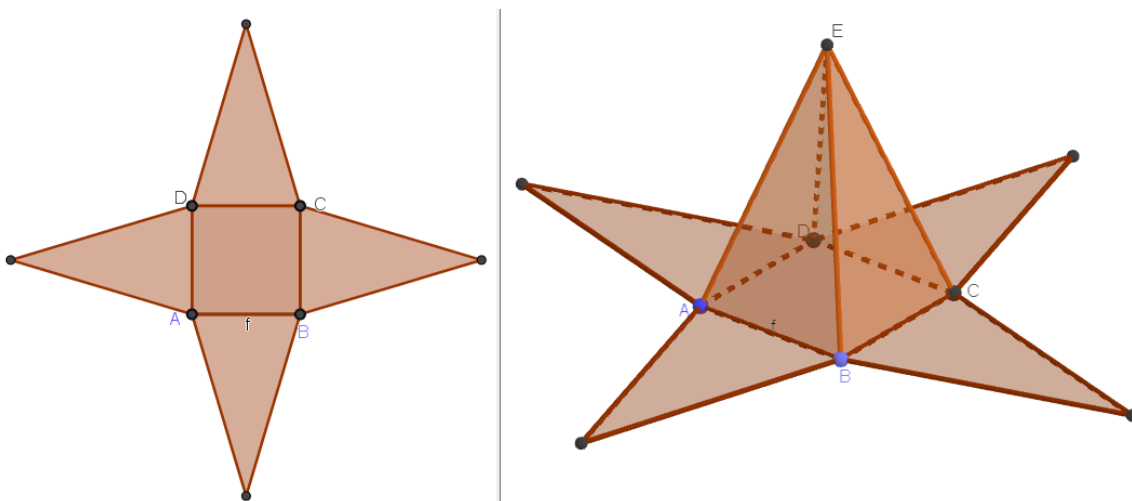
2. Se consideră pe planul α triunghiul ABC cu latura $AB \subset \alpha$, $AB = 40\text{ cm}$, $BC = 32\text{ cm}$ și $AC = 24\text{ cm}$. Fie $F \in (AC)$, $H \in (BC)$ astfel încât $CF = 8\text{ cm}$, $CH = 6\text{ cm}$.
- Dacă dreapta $HF \cap \alpha = \{I\}$, arătați că punctele I, A și B sunt coliniare.
 - Calculați perimetrul patrulaterului $AFHB$.



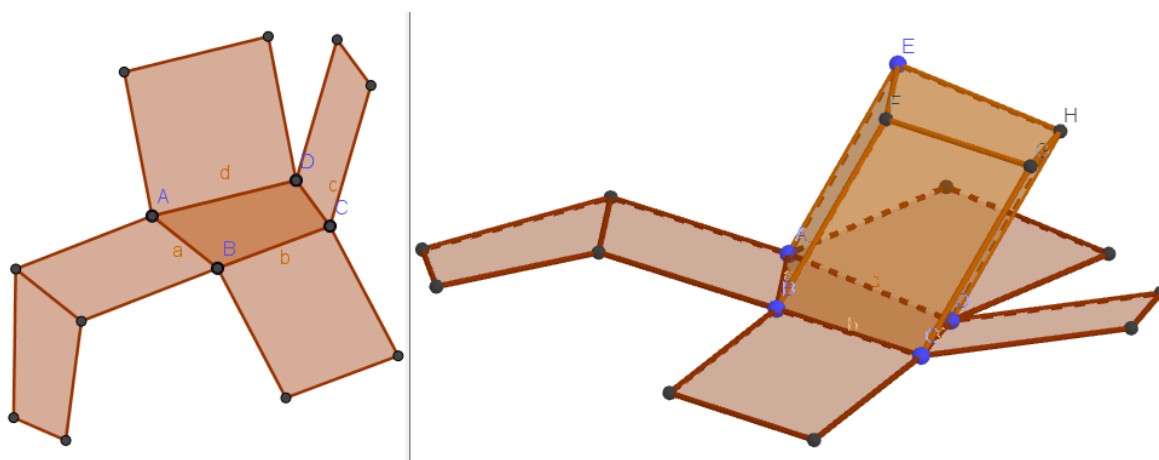
1. Construiți o piramidă triunghiulară și realizați desfășurarea acesteia.



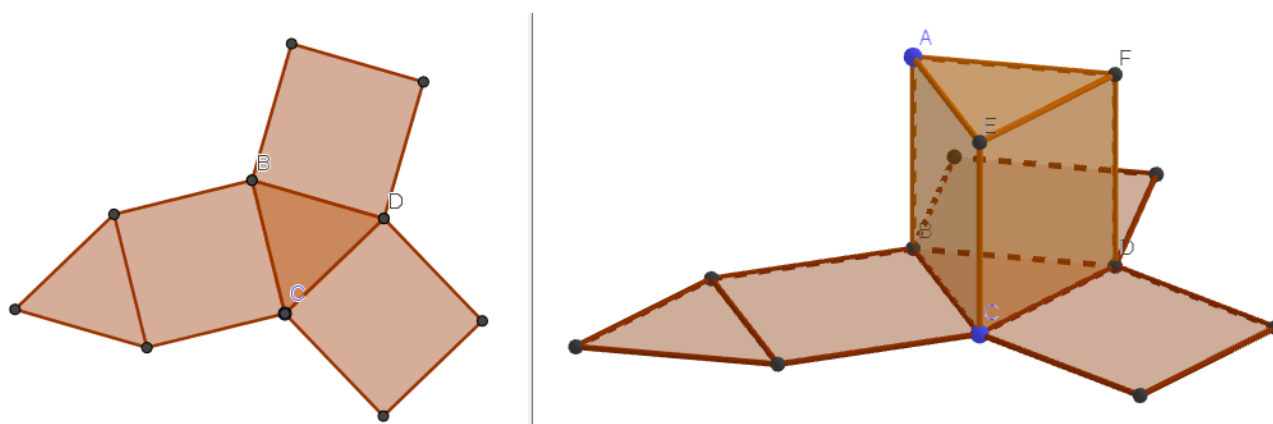
2. Construiți o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de $AB = 5\text{ cm}$ și înălțimea de 8 cm . Realizați desfășurarea acesteia.



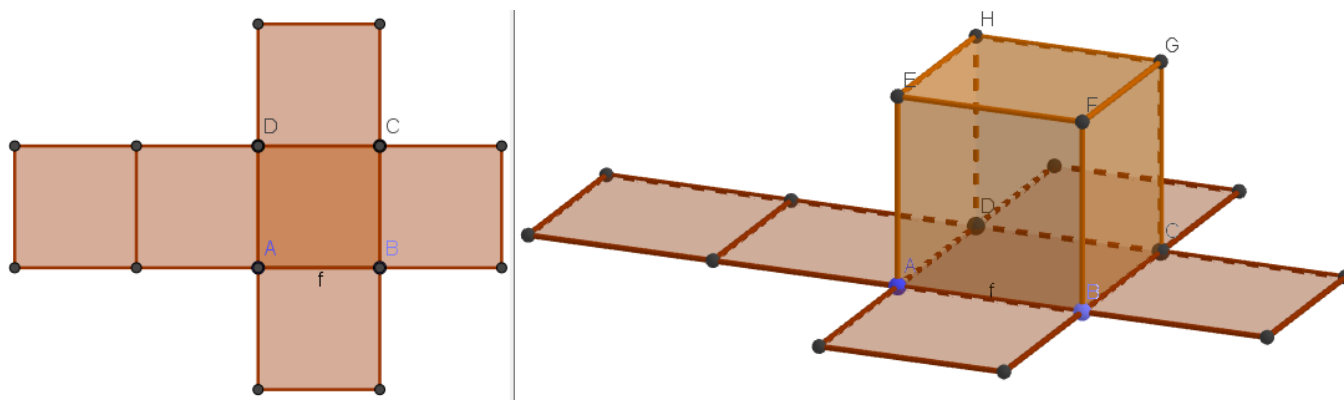
1. Construiți o prismă patrulateră și realizați desfășurarea acesteia.



2. Construiți o prismă triunghiulară regulată și realizați desfășurarea acesteia.



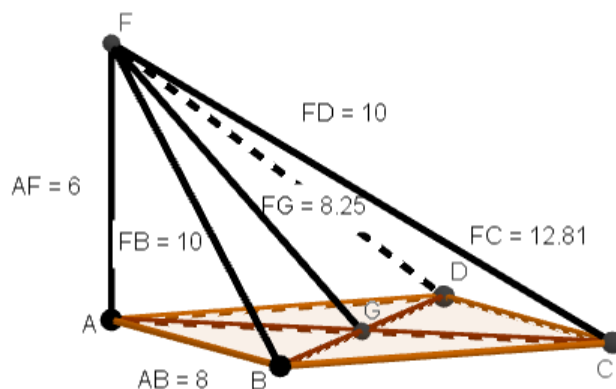
3. Construiți un cub cu latura bazei de 6 cm.



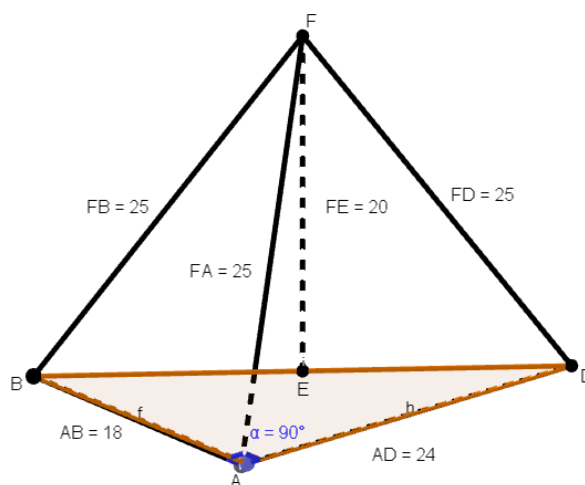
RELAȚII ÎNTRE PUNCTE, DREPTE ȘI PLANE

Dreapta perpendiculară pe un plan; distanța de la un punct la un plan; înălțimea piramidei

1. Pe planul pătratului $ABCD$, cu $AB = 8 \text{ cm}$, se ridică perpendiculara FA , cu $AF = 6 \text{ cm}$. Aflați lungimile FB, FC, FD și FG , unde G este centrul pătratului $ABCD$. (Lungimile segmentelor FC și FG le vom aproxima cu două zecimale)



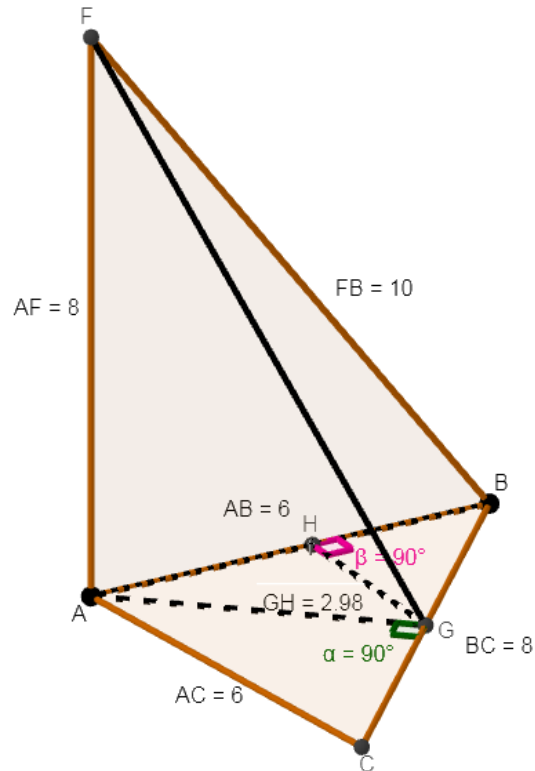
2. Pe planul $\triangle ABD$, $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, cu $AB = 18 \text{ cm}$ și $AD = 24 \text{ cm}$, în centrul cercului circumscris lui, se ridică perpendiculara $FE = 20 \text{ cm}$. Aflați distanțele de la F la vârfurile $\triangle ABD$.



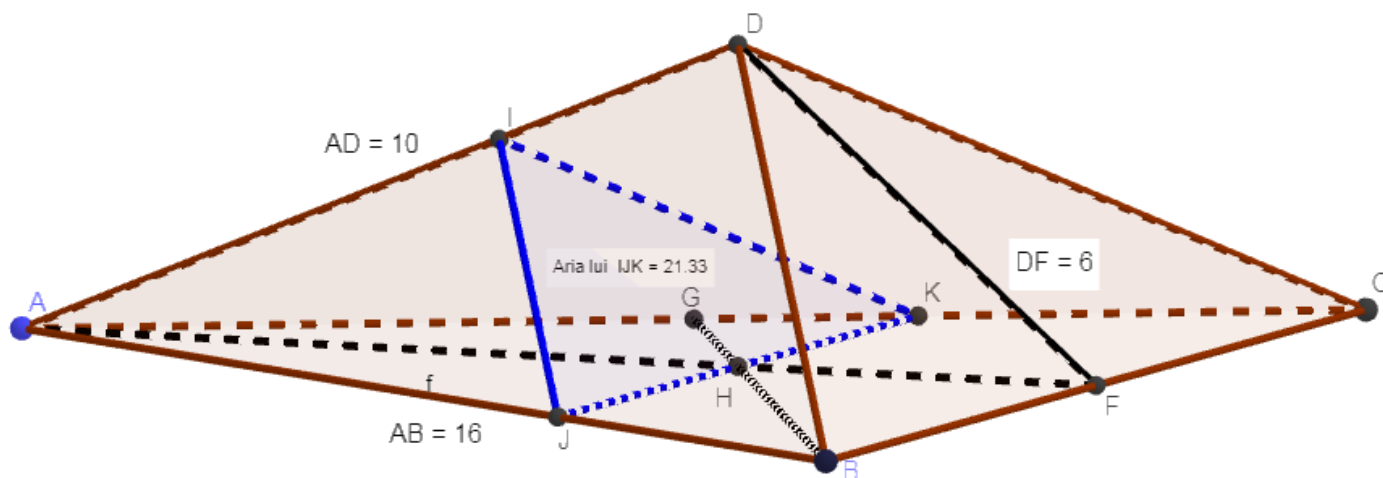
Semestrul I

3. Pe planul triunghiului isoscel ABC se ridică perpendiculara AF . Se știe că $AB = AC = 6 \text{ cm}$, iar $BC = AF = 8 \text{ cm}$.

- Calculați FB ;
- Arătați că $BC \perp (GAF)$, unde G este mijlocul laturii BC ;
- Calculați $d(G, AB)$. (Aproximare cu două zecimale).



1. O piramidă triunghiulară regulată $DABC$ are baza $\triangle ABC$, cu $AB = 16 \text{ cm}$ și $DA = 10 \text{ cm}$. Fie F mijlocul muchiei $[BC]$.
 - a) Calculați DF ;
 - b) Se consideră planul paralel cu (DBC) care conține punctul H , unde H este centrul $\triangle ABC$. Calculați aria secțiunii obținute în piramida $DABC$. (Aria se va aproxima cu două zecimale)

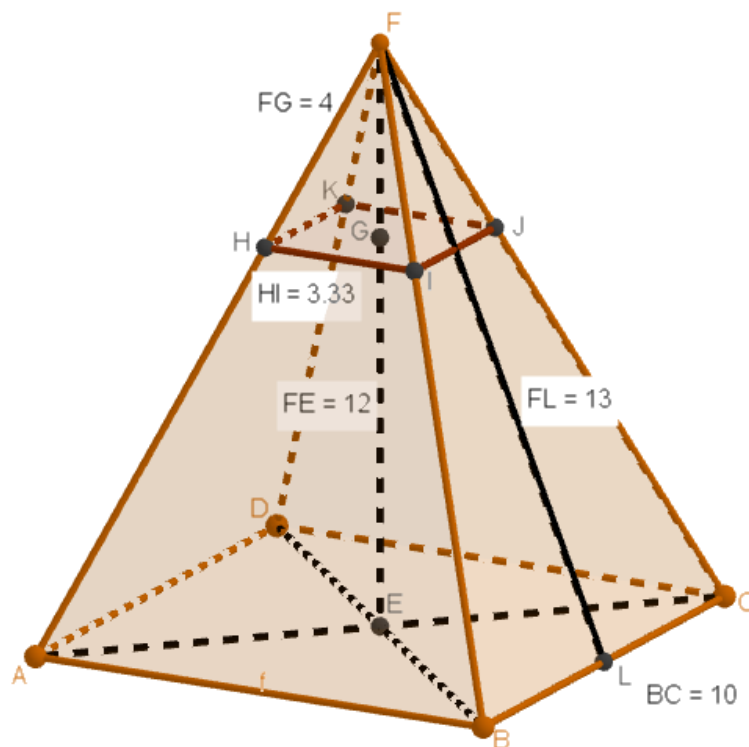


Semestrul I

2. Pe înălțimea FE a piramidei patrulatere regulate $FABCD$ se consideră punctul G . Prin punctul G se duce planul paralel cu planul bazei piramidei care taie muchiile $[FA]$, $[FB]$, $[FC]$ și $[FD]$ în punctele H, I, J , respectiv K . Știind că $AB = 10\text{ cm}$, $FE = 12\text{ cm}$ și $FG = 4\text{ cm}$, calculați:

- HI (aproximare cu două zecimale);
- Lungimea apotemei piramidei $FABCD$

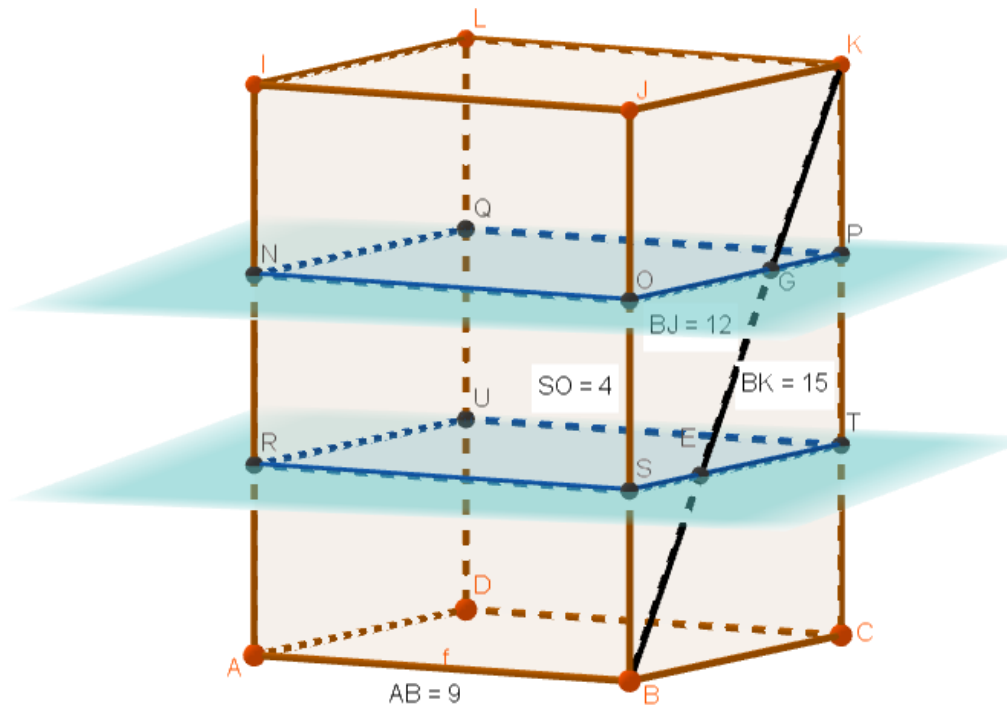
Figură:



Semestrul I

3. Fie prisma patrulateră regulată $ABCDIJKL$ în care $AB = 9\text{ cm}$ și $BJ = 12\text{ cm}$. Pe segmentul $[BK]$ se consideră punctele E și G astfel încât $BE = EG = GK$. Planele α și β sunt paralele cu bazele prisme, iar $E \in \alpha$ și $G \in \beta$.
 Calculați:

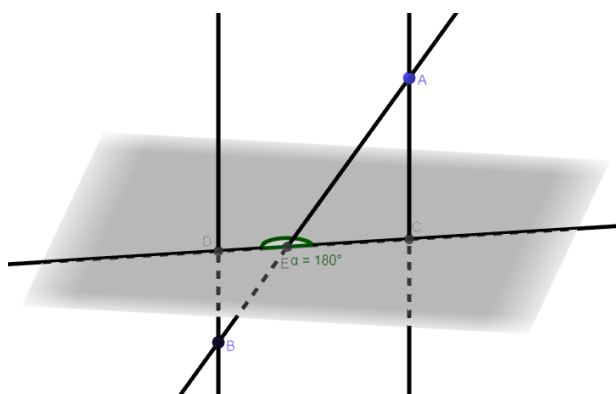
- BK ;
- $d(\alpha, \beta)$.



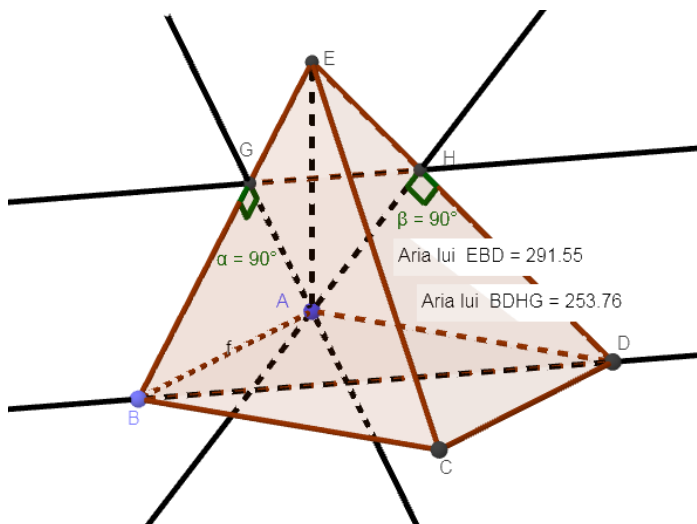
PROIECȚII ORTOGONALE PE UN PLAN

Proiecții ortogonale de puncte, de segmente de dreaptă și de drepte pe un plan

1. Punctele A și B sunt de o parte și de alta a planului α , iar punctele C și D sunt proiecțiile punctelor A , respectiv B pe planul α . Dacă $AB \cap \alpha = \{E\}$, arătați că punctele C, E și D sunt coliniare.

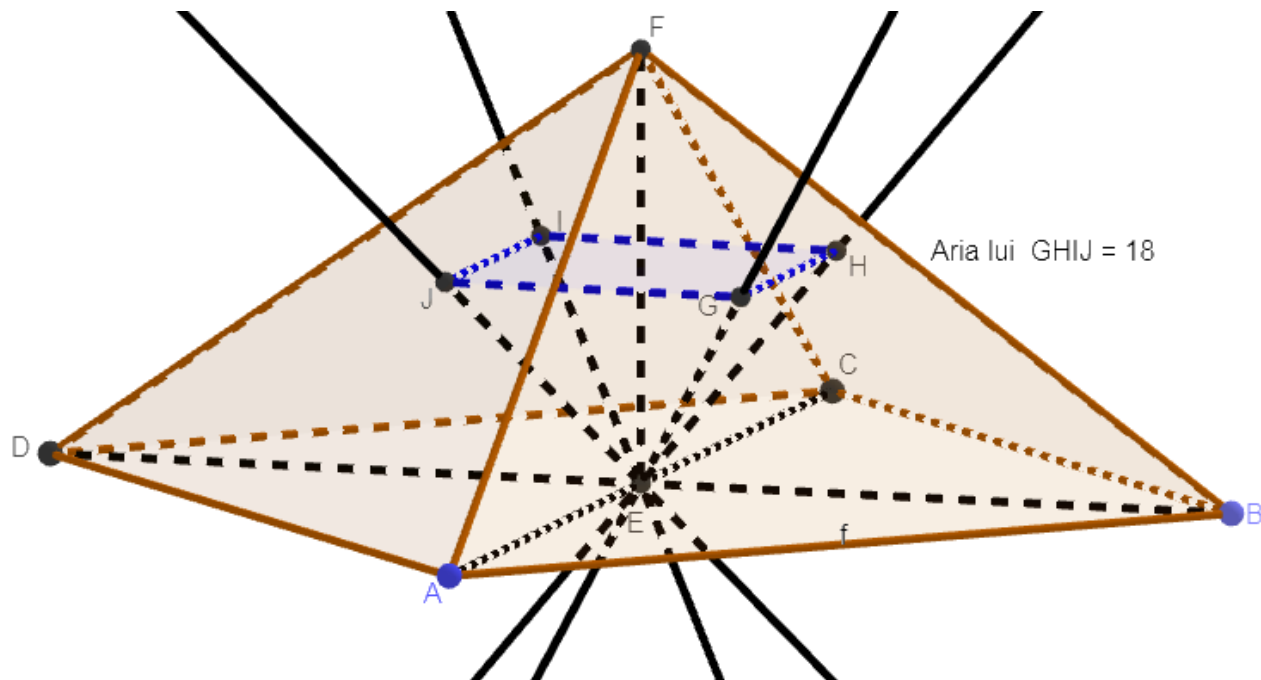


2. Fie $ABCD$ un pătrat de latură $AB = 20 \text{ cm}$. Pe planul pătratului se ridică perpendiculara $EA = 15 \text{ cm}$ și se notează cu H și G proiecțiile punctului A pe planele (EC) și respectiv, (EBC) .
 - a) Arătați că dreapta HG este paralelă cu planul (ABC) .
 - b) Calculați aria triunghiului EBD și a trapezului $BDHG$. (Aproximare cu două zecimale)



Semestrul I

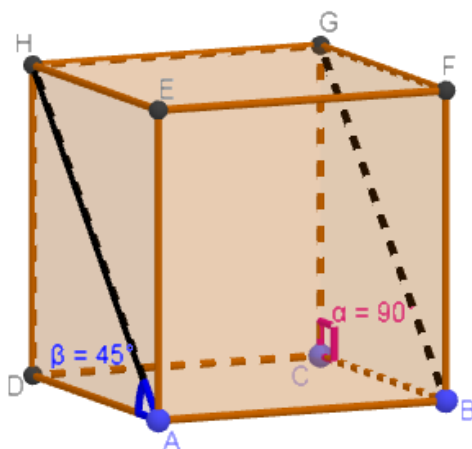
3. Fie $FABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de 12 cm și înălțimea piramidei $FE = 6\text{ cm}$. Dacă G, H, I și J sunt proiecțiile punctului E pe planele $(VAB), (VBC), (VDC)$ și respectiv, (VAD) , stabiliți poziția planului (GHI) față de planul bazei și calculați aria patrulaterului $GHIJ$.



Unghiul dintre o dreaptă și un plan; lungimea proiecției unui segment

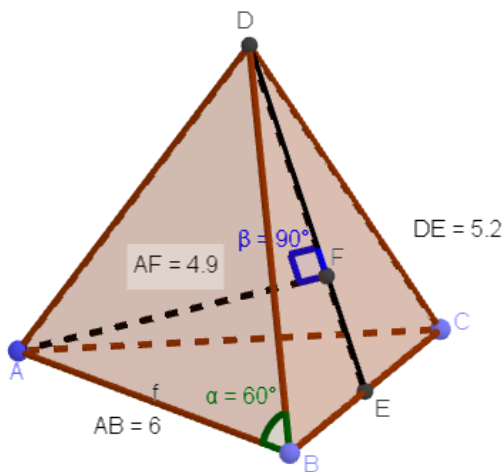
1. În cubul ABCDEFGH, calculați:

- a) $m(CG, \widehat{ABC})$; b) $m(AH, \widehat{ABC})$; c) $m(BG, \widehat{ADH})$



2. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu latura $AB = 6 \text{ cm}$.

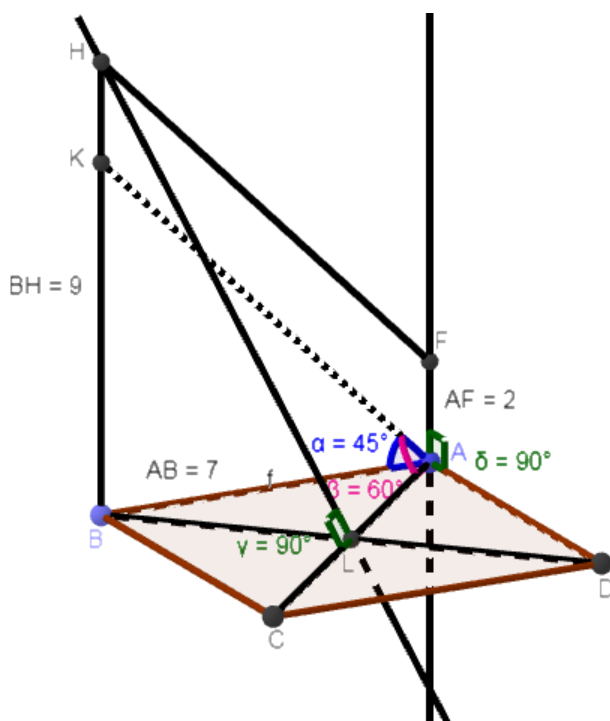
- a) Determinați lungimea apotemei tetraedrului.
 b) Calculați distanța de la A la planul (BCD) . (Aproximare cu 2 zecimale)
 c) Calculați $m(AB, \widehat{BCD})$.



Semestrul I

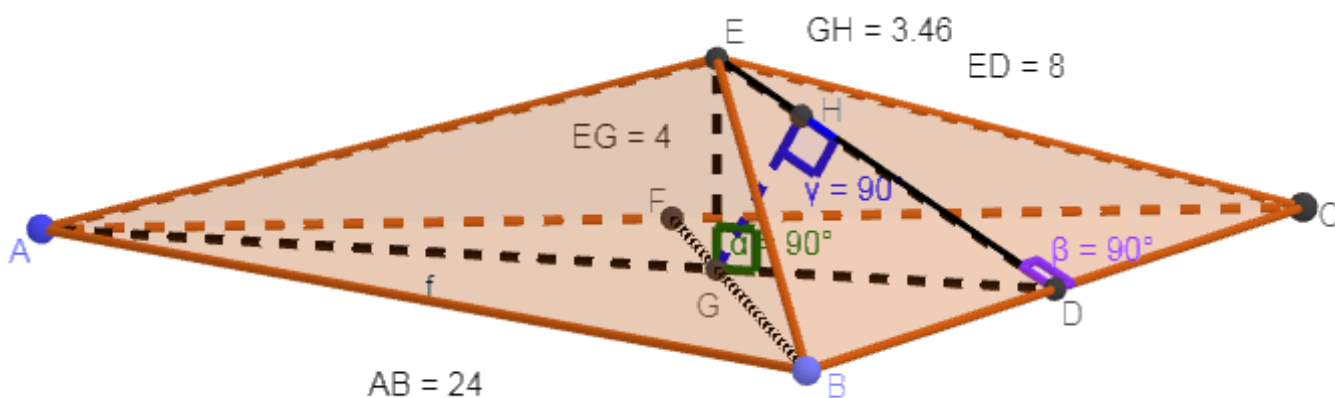
3. În vârfurile A și B ale pătratului $ABCD$ se ridică pe planul acestuia, de aceeași parte, perpendicularele AF și BH , unde $AB = 7\text{ cm}$, $AF = 2\text{ cm}$ și $BH = 9\text{ cm}$.

- Determinați $m(\widehat{FH, (ABC)})$;
- Arătați că $m(\widehat{FH, AC}) > 45^\circ$;
- Arătați că $pr_{AC}[FH] = [AL]$, unde L este centru pătratului.



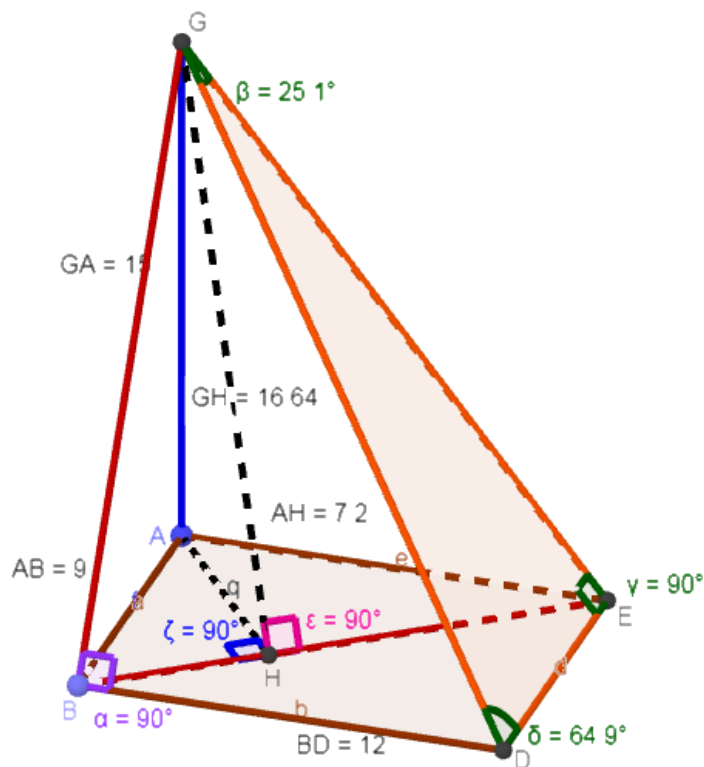
1. Piramida triunghiulară regulată $EABC$ are latura bazei $AB = 24 \text{ cm}$ și înălțimea $EG = 4 \text{ cm}$. Calculați:

- Distanța de la E la latura BC .
- Distanța de la G la planul (EBC) . (Aproximare cu două zecimale)

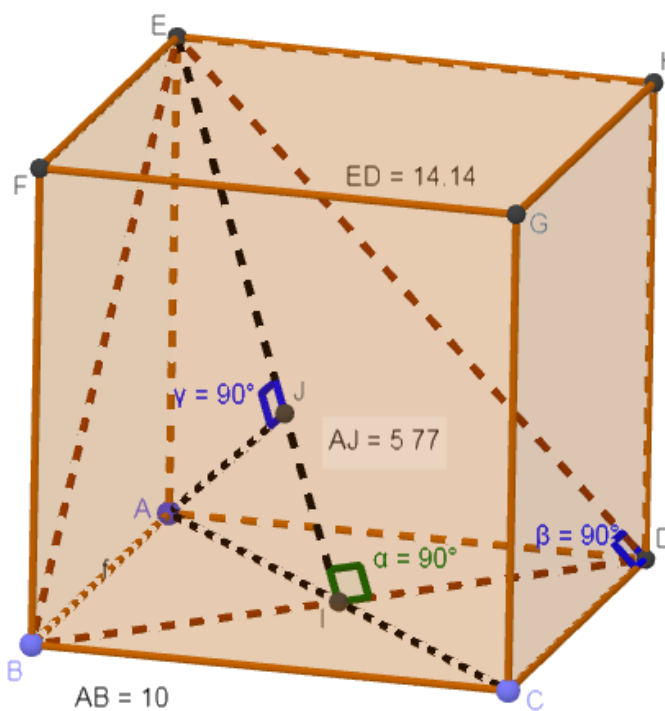


2. Pe planul dreptunghiului $ABDE$, cu $AB = 9\text{ cm}$ și $BD = 12\text{ cm}$, se ridică perpendiculara $AG = 15\text{ cm}$.

- Arătați că $GB \perp BD$.
- Arătați că $\triangle GED$ este dreptunghic.
- Calculați $d(A, BE)$ și $d(G, BE)$. (Aproximare cu două zecimale)



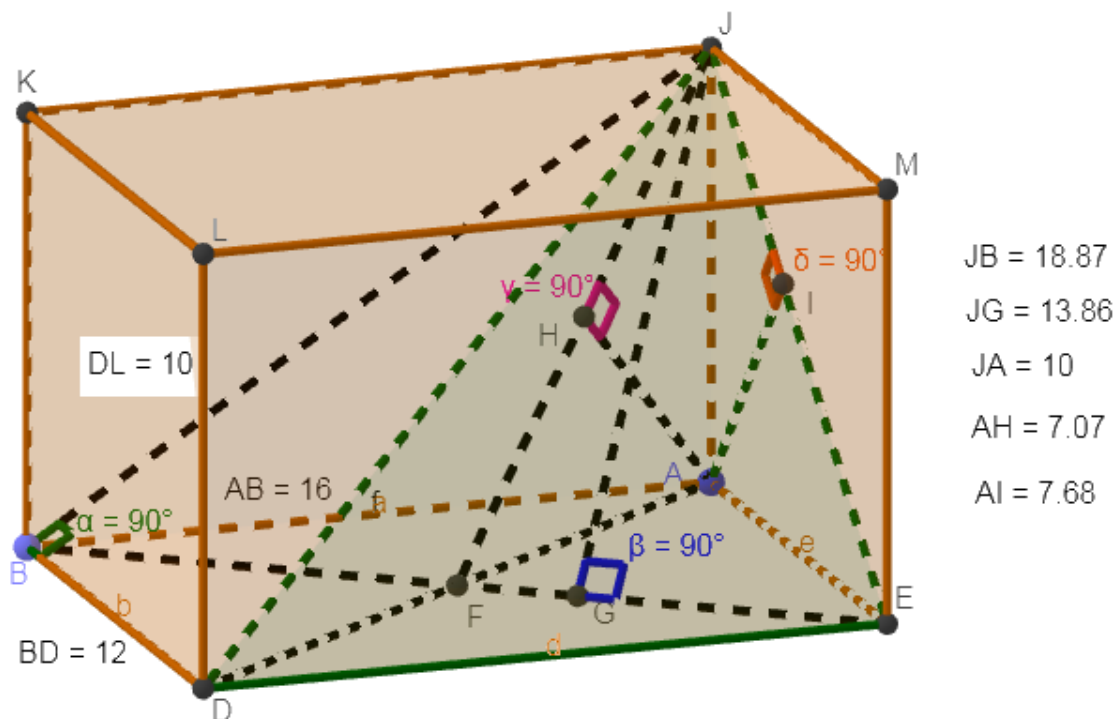
3. Fie cubul $ABCDEFGH$ cu $AB = 10$ cm.
- Arătați că $EI \perp BD$, unde $AC \cap BD = \{I\}$.
 - Calculați $d(E, DC)$. (Aproximare cu două zecimale)
 - Calculați $d(A, (EBD))$. (Aproximare cu două zecimale)



Calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței dintre două plane paralele

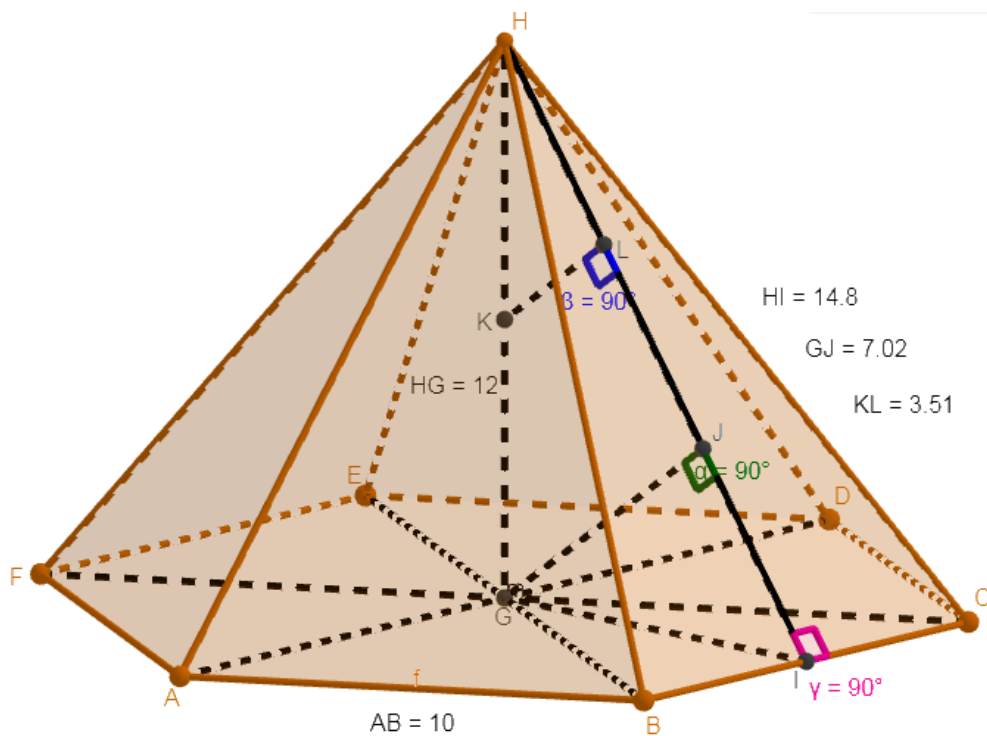
1. Paralelipipedul dreptunghic $ABDEJKLM$ are $AB = 16\text{ cm}$, $BD = 12\text{ cm}$ și $DL = 10\text{ cm}$. Calculați:
 a) $d(J, BD)$; b) $d(J, BE)$; d) $d(J, AD)$; e) $d(A, JF)$, unde $AD \cap BE = \{F\}$ f) $d(A, (JDE))$.

(Distanțele se vor aproxima cu două zecimale)



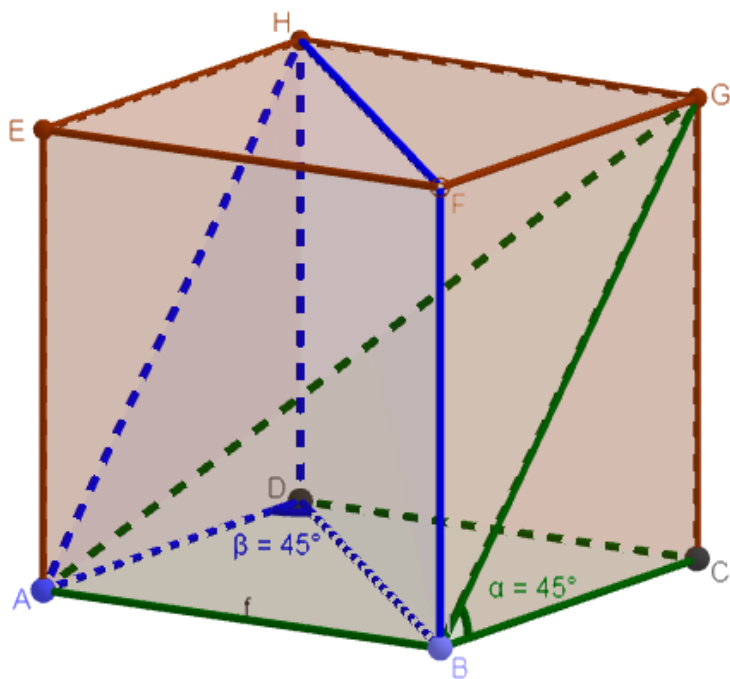
Semestrul I

2. Fie HABCDEF piramida hexagonală regulată în care $AB = 10\text{ cm}$ și $HO = 12\text{ cm}$. Calculați:
 a) $d(H, BC)$; b) $d(G, (HBC))$; c) $d(K, (HBC))$, unde K este mijlocul $[HG]$.
 (Distanțele se vor aproxima cu două zecimale)



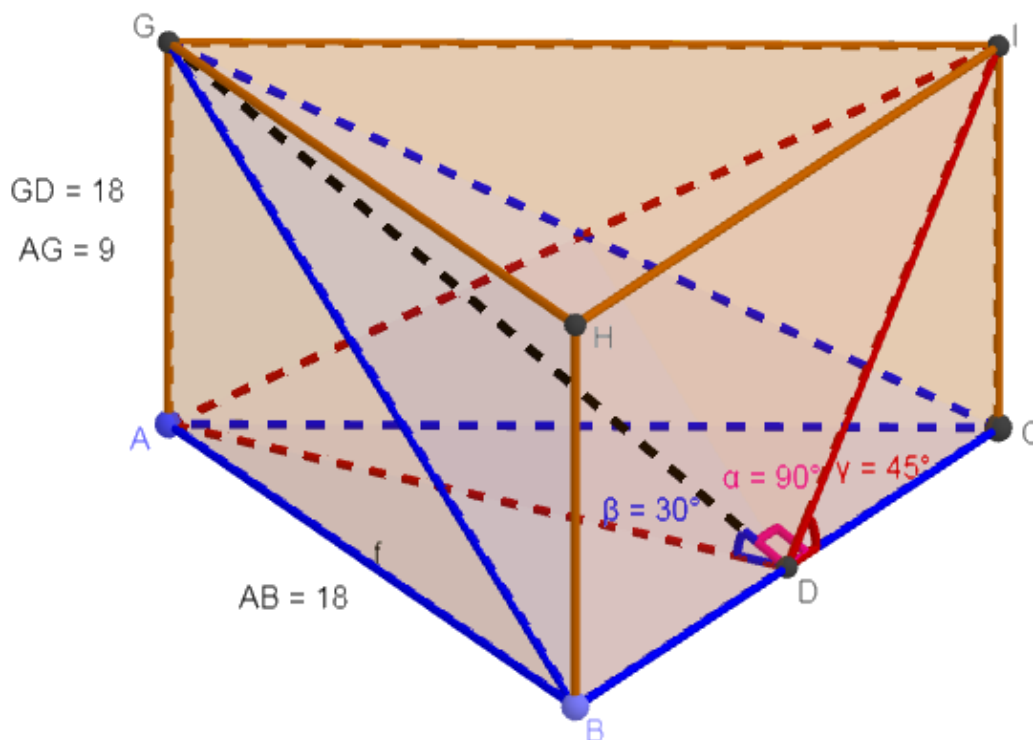
1. Fie cubul $ABCDEFGH$, cu $AB = 8 \text{ cm}$. Calculați:

- Măsura unghiului format de planele (GAB) și (ABC) ;
- Măsura unghiului diedru format de planele (ADH) și (FBD) .



2. Fie $ABCGHI$ o prismă triunghiulară regulată dreaptă cu $AB = 18 \text{ cm}$ și $AG = 9 \text{ cm}$, iar D este mijlocul $[BC]$. Calculați:

- Distanța de la G la BC ;
- Măsura unghiului diedru format de planele (GBC) și (ABC) ;
- Măsura unghiului diedru format de planele (DIA) și (ABC) .





1. Fianu M., Perianu M., Săvulescu D., *Matematică, clasa a VIII-a* Editura ART, Clubul Matematicienilor, București, 2015.

2. Anton Negrilă, Maria Negrilă, *Matematică algebră, geometrie, clasa a VIII-a Consolidare, Semestrul I*, Editura Paralela 45, Pitești 2016.