

GHID DE PREDARE A MATEMATICII CU AJUTORUL METODELOR DIGITALE

Clasa a VII a



Realizat de Cristina Mihaela Pop, Ciprian Ittu, Carmen Buta, Alin Danciu, Nicoleta Duma, profesori de matematică, coordonat de Adina Roșca, expert Educațional Digitaliada
Revizuit de Cristian Petru Pop, Inspector de Matematică ISJ Cluj

Textul și ilustrațiile din acest material sunt licențiate de Fundația Orange conform termenilor și condițiilor licenței AttributionNonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0) care poate fi consultată pe pagina web <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>. Ilustrațiile din acest material reprezintă capturi din aplicațiile recomandate pentru utilizare. Coperta, ilustrațiile, mărcile înregistrate, logo-urile Fundația Orange, Digitaliada și orice alte elemente de marcă incluse pe copertă sunt protejate prin drepturi de proprietate intelectuală exclusive și nu pot fi utilizate fără consimțământul anterior expres al titularilor de drepturi.

Cuprins

Introducere	- 4 -
Avantaje ale utilizării aplicațiilor digitale și resurselor educaționale digitale în procesul instructiv – educativ.....	- 5 -
ALGEBRĂ.....	- 6 -
Capitolul I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE.....	- 7 -
Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural.....	- 7 -
Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional.....	- 10 -
Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical.....	- 12 -
Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale	- 15 -
Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări. Compararea și ordonarea numerelor reale.....	- 17 -
Modulul unui număr real.....	- 19 -
Adunarea și scăderea numerelor reale.....	- 21 -
Înmulțirea numerelor reale	- 23 -
Împărțirea numerelor reale	- 25 -
Puteri cu exponent număr întreg	- 27 -
Raționalizarea numitorului.....	- 29 -
Ordinea efectuării operațiilor	- 31 -
Media aritmetică ponderată a n numere reale. Media geometrică a două numere reale pozitive..	- 33 -
Ecuatii de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$	- 35 -
Capitolul II. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII.....	- 37 -
Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități	- 37 -
Ecuatii de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$	- 39 -
Sisteme de ecuații liniare. Metoda substituției.....	- 43 -
Sisteme de ecuații liniare. Metoda reducerii	- 46 -
Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	- 49 -
Probleme care se rezolvă cu ajutorul sistemelor de ecuații.....	- 51 -
Capitolul III. PROBLEME DE ORGANIZARE A DATELOR	- 54 -

Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale	- 54 -
Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale. Distanța dintre două puncte din plan	- 57 -
Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice. Poligonul frecvențelor	- 60 -
GEOMETRIE	- 65 -
Capitolul I. PATRULATERE.....	- 66 -
Patrulaterul convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex	- 66 -
Paralelogramul; proprietăți.....	- 69 -
Aplicații în geometria triunghiului: linia mijlocie în triunghi	- 74 -
Aplicații în geometria triunghiului: centrul de greutate al unui triunghi	- 77 -
Paralelograme particulare: dreptunghiul	- 80 -
Paralelograme particulare: rombul	- 84 -
Paralelograme particulare: pătratul	- 89 -
Trapezul: clasificare, proprietăți	- 93 -
Linia mijlocie în trapez	- 98 -
Aria triunghiului	- 101 -
Aria patrulaterelor	- 104 -
Capitolul II. CERCUL.....	- 108 -
Unghi înscris în cerc.....	- 108 -
Coarde și arce în cerc	- 111 -
Tangente dintr-un punct exterior la cerc	- 118 -
Poligoane regulate înscrise în cerc. Triunghiul echilateral	- 122 -
Poligoane regulate înscrise în cerc. Pătratul.....	- 125 -
Poligoane regulate înscrise în cerc. Hexagonul regulat	- 128 -
Lungimea cercului. Aria discului	- 131 -
Capitolul III. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR	- 133 -
Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante	- 133 -
Teorema lui Thales. Reciproca teoremei lui Thales. Teorema bisectoarei	- 136 -
Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării.....	- 140 -
Criteriile de asemănare a două triunghiuri	- 144 -

Capitolul IV. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIIC	- 150 -
Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii	- 150 -
Teorema catetei	- 154 -
Teorema lui Pitagora	- 158 -
Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic	- 162 -

Introducere

Digitaliada este un program de educație digitală ce încurajează folosirea la clasă a metodelor de lucru interactive și a conținutului digital educativ, pentru a crește performanțele școlare ale elevilor. Programul are două componente:

- la nivel național - platforma www.digitaliada.ro, care conține materiale digitale educative validate de experți în educație
- la nivel rural - proiectul Digitaliada în școli gimnaziale de la sate

Lansată în septembrie 2016, platforma www.digitaliada.ro încurajează crearea și partajarea de conținut educațional liber ce poate fi folosit de orice persoană din România. Pe platformă, Digitaliada pune la dispoziția publicului larg o serie de materiale digitale educaționale, realizate în cadrul proiectului de profesorii și autorii parteneri #Digitaliada și de cadrele didactice sau alte persoane interesate de acest domeniu. Aceste resurse pot fi folosite, la alegerea profesorului, în procesul de predare la ciclul gimnazial.

În cadrul acestui Ghid veți regăsi recomandări bazate pe experiența acumulată în cadrul programului Digitaliada și a implementării acestuia în 50 de școli din mediul rural în perioada 2016-2022.

Avantaje ale utilizării aplicațiilor digitale și resurselor educaționale digitale în procesul instructiv – educativ

- oferă elevilor un instrument modern și atractiv de exersare a noțiunilor teoretice și de formare a competențelor specifice;
- elevii pot colabora, pot învăța împreună sau pot concura unii cu alții;
- fiecare elev poate lucra în ritm propriu, fiind esențial progresul fiecăruia raportat la nivelul inițial;
- crește interesul elevilor pentru studiul prin integrarea educației digitale în demersul didactic;
- elevii se pot autoevalua, putând vizualiza la final soluția corectă pentru fiecare întrebare la care au răspuns eronat;
- îmbină metodele didactice tradiționale cu cele moderne;
- stimularea capacității de învățare;
- creșterea motivației elevilor;
- instalarea climatului de autodepășire, competitivitate;
- întreține un nivel ridicat al atenției;
- stimularea gândirii logice și a imaginației;
- asigură un feed-back rapid;
- stabilirea unor măsuri de remediere bazate pe feed-back-ul primit;
- utilizarea aplicațiilor de către elevi se poate face utilizând diferite dispozitive IT (tabletă, telefon mobil, PC).

ALGEBRĂ

Capitolul I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

Aplicații recomandate: Math Tests, Torrential Maths, Kahoot!

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui \mathbb{R}

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.1. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)

Repere!

$1^2 = 1$

$2^2 = 4$

$3^2 = 9$

$4^2 = 16$

$5^2 = 25$

$6^2 = 36$

$7^2 = 49$

$8^2 = 64$

$9^2 = 81$

$10^2 = 100$

$11^2 = 121$

$12^2 = 144$

$13^2 = 169$

$14^2 = 196$

$15^2 = 225$

...

Definiție: Un număr natural x se numește **pătrat perfect** dacă există numărul întreg a cu proprietatea că $x = a^2$, unde $a \in \mathbb{Z}$.

Definiție: Dacă x este număr natural, pătrat perfect, numărul natural a pentru care $x = a^2$ se numește **rădăcina pătrată a lui a** .

Scriem: $a = \sqrt{x}$.

Citim: „radical din x este egal cu a ” sau „rădăcina pătrată a lui x este egală cu a ”.

$\sqrt{1} = 1$

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{9} = 3$

$\sqrt{16} = 4$

$\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{36} = 6$

$\sqrt{49} = 7$

$\sqrt{64} = 8$

$\sqrt{81} = 9$

$\sqrt{100} = 10$

$\sqrt{121} = 11$

$\sqrt{144} = 12$

$\sqrt{169} = 13$

$\sqrt{196} = 14$

$\sqrt{225} = 15$

...

Reținem!



Dacă a și b sunt pătratele a două numere naturale, atunci:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$$

Exemplu: $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16 + 9}$, adică $7 \neq 5$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a - b}$$

Exemplu: $\sqrt{169} - \sqrt{25} \neq \sqrt{169 - 25}$, adică $8 \neq 12$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Exemplu: $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{100}$, adică $5 \cdot 2 = 10$

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b} \text{ sau } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Exemplu: $\sqrt{225} : \sqrt{25} = \sqrt{9}$, adică $15 : 5 = 3$

Așadar, extragerea rădăcinii pătrate este operația inversă ridicării la pătrat.

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Rezultatul calculului $\sqrt{16} + \sqrt{25}$ este
2. Rezultatul calculului $\sqrt{729}$ este
3. Rezultatul calculului $\sqrt{16^2 \cdot 15^2}$ este



Nivel 2

1. Rezultatul calculului $\sqrt{(-26)^2} - \sqrt{13^2 - 12^2}$ este
2. Rezultatul calculului $\sqrt{\sqrt{144} : (-\sqrt{9}) + 20}$ este
3. Rezultatul calculului $\sqrt{186624}$ este



Nivel 3

1. Arătați că numărul $n = 432 \cdot 289 + 1 + 2 + 3 + \dots + 288$ este pătrat perfect și calculați \sqrt{n} .
2. Dacă a și b sunt cifre diferite de 0, și $a + b = 11$, calculați $\sqrt{ab + ba}$.
3. Găsiți numărul \overline{abc} știind că $\sqrt{1ab} = \overline{c3}$, unde a, b, c sunt cifre diferite.

Aplicații recomandate!

Aplicația: Math Tests

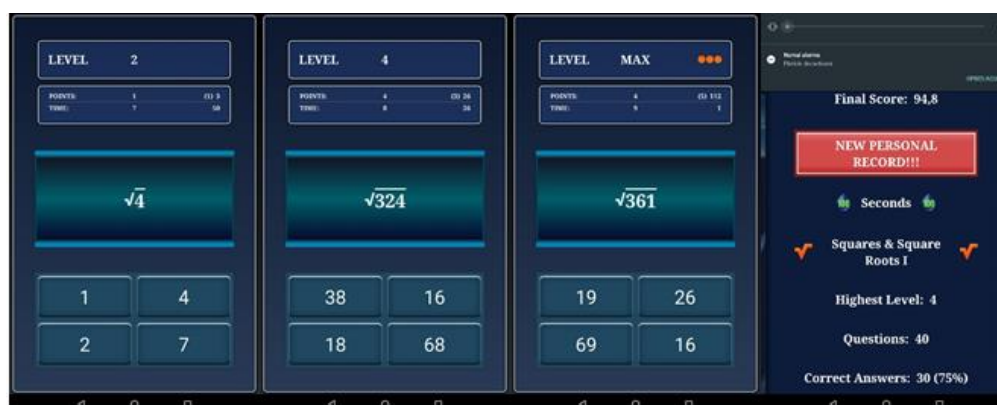


Se accesează aplicația **Math Tests** și se selectează:

- „Tests” = Teste
- „Roots, powers and exponents” = Radicali, puteri și exponenți
- „Square root” = Radicali
- „Exponents and roots with decimal base” = Puteri și radicali
- „Start test” = Începe testul



Aplicația: Torrential Math



Aplicația: Kahoot!



Link: <https://create.kahoot.it/share/patrate-perfecte-radacina-patrata-a-patraturului-unui-numar-natural/a78cbab8-9bfb-4388-a261-ea7a0eeff89d>

Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

Aplicația recomandată: Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui \mathbb{R}

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.1. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)

Repere!

Dacă pentru numărul rațional $\frac{p}{q}$ există numărul rațional $\frac{a}{b} \geq 0$ astfel încât $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{p}{q}$, atunci putem scrie $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{p}{q}}$ și citim: „rădăcina pătrată a numărului $\frac{p}{q}$ este numărul $\frac{a}{b}$ ” sau „radical din $\frac{p}{q}$ este egal cu $\frac{a}{b}$ ”.

Exemple: $\sqrt{\frac{81}{49}} = \frac{9}{7}$; $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$; $\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{8}{5}$.

Dacă numărul rațional pozitiv este scris sub formă de fracție zecimală finită, atunci extragerea rădăcinii pătrate din număr se face scriind fracția zecimală sub formă ordinară.

Exemplu: $\sqrt{6,25} = \sqrt{\frac{625}{100}} = \sqrt{\left(\frac{25}{10}\right)^2} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} = 2,5$.

Pentru a aproxima rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv x , printr-un număr natural, încadrăm numărul x între două pătrate perfecte consecutive: $n^2 \leq x < (n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Exemplu: $x = 75 \Rightarrow 64 < 75 < 81 \Rightarrow 8 < \sqrt{75} < 9$.

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Rezultatul calculului $\sqrt{\frac{361}{961}}$ este
2. Rezultatul calculului $\sqrt{2\frac{7}{9}} + \sqrt{0,(4)}$ este
3. Determinați numărul $x \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x < \sqrt{43} < x + 1$.



Nivel 2

1. Rezultatul calculului $\sqrt{1062,76}$ este
2. Rezultatul calculului $\sqrt{\frac{35^2 - 28^2}{12^2 + 9^2}}$ este
3. Câte numere naturale k , există pentru care $\sqrt{\frac{72}{k}} \in \mathbb{N}$?



Nivel 3

1. Dacă a, b, c sunt cifre diferite și $a + b + c = 10$, calculați $\sqrt{a,(b) + b,(c) + c,(a)}$.
2. Determinați primele două zecimale ale lui $\sqrt{8}$.
3. Determinați cifrele x și y ($x \neq y$) pentru care $\sqrt{2,(x) + 3,(y)}$ este număr rațional.

Aplicații recomandate!

Aplicația: [Quizizz](#)

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/612c5dc938eec8001e7d39d5>

QUIZZ

Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical

Aplicații recomandate: Math Tests, Kahoot!

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui \mathbb{R}

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.1. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale

Repere!

Scoaterea factorilor de sub radical

Dacă $n \geq 0$ și $n = a^2b$, atunci

$$\sqrt{n} = \sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}, b \geq 0.$$

Exemplu: $\sqrt{128} = \sqrt{64 \cdot 2} = \sqrt{8^2 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$

Pentru a evidenția pătratele perfecte care apar ca factori sub radical, este util să descompunem numărul în produs de factori primi.

$$\sqrt{147} = ?$$

$$\begin{array}{r|l} 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt{147} = \sqrt{7^2 \cdot 3}$$

$$\sqrt{147} = 7\sqrt{3}$$

$$\sqrt{216} = ?$$

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt{216} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\sqrt{216} = 2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3} = 6\sqrt{6}$$

Introducerea factorilor sub radical

Dacă $b \geq 0$, atunci

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}, \text{ dacă } a > 0 \text{ și}$$

$$a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}, \text{ dacă } a < 0.$$

Exemple:

$$3\sqrt{6} = \sqrt{3^2 \cdot 6} = \sqrt{9 \cdot 6} = \sqrt{54}$$

$$-2\sqrt{5} = -\sqrt{2^2 \cdot 5} = -\sqrt{4 \cdot 5} = -\sqrt{20}$$

$$0,8\sqrt{2} = \sqrt{(0,8)^2 \cdot 2} = \sqrt{0,64 \cdot 2} = \sqrt{1,28}$$



Pot să aplic!



Nivel 1

1. Scoateți factorul de sub radical $\sqrt{24}$.
2. Introduceți factorul sub radical $5\sqrt{2}$.
3. Scoateți factorul de sub radical: $\sqrt{3^5 \cdot 5^3}$.



Nivel 2

1. Introduceți factorul sub radical: $-2\sqrt{\frac{3}{8}}$.
2. Introduceți factorul sub radical: $\frac{3}{5}\sqrt{0, (5)}$.
3. Scoateți factorul de sub radical $-\sqrt{3, (5)}$.



Nivel 3

1. Scoateți factorul de sub radical: $\sqrt{\frac{32x^4}{9y^2}}$, unde $x > 0$ și $y > 0$.
2. Scoateți factorul de sub radical: $\sqrt{\frac{2x^5}{49}}$, unde $x > 0$.
3. Scoateți factorul de sub radical: $\sqrt{-\frac{8x^3}{75}}$, unde $x < 0$.

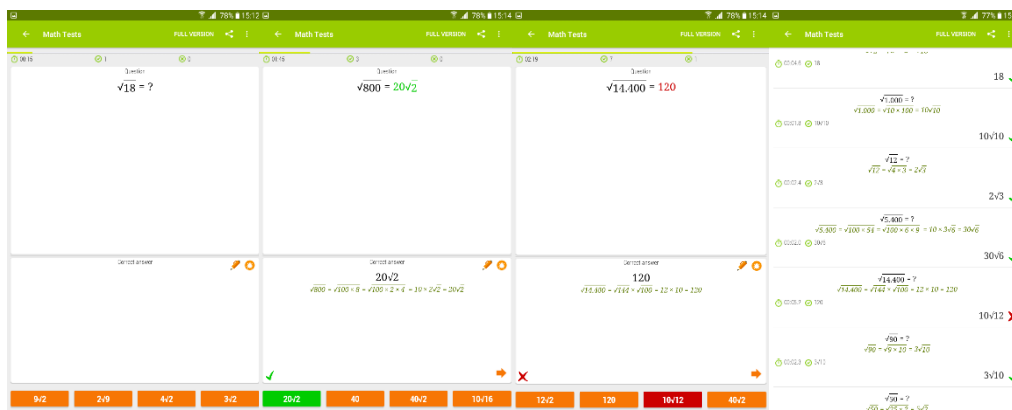
Aplicații recomandate!

Aplicația: Math Tests



Se accesează aplicația **Math Tests** și se selectează:

- „Tests” = Teste
- „Roots, powers and exponents” = Radicali, puteri și exponenți
- „Simplify square root” = Scoaterea factorilor de sub radical
- „Start test” = Începe testul



Aplicația: Kahoot!



Link: <https://create.kahoot.it/share/scoaterea-factorilor-de-sub-radical-introducerea-factorilor-sub-radical/60c0629e-c39d-4a4b-99a3-5c0a00707e9f>

Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale

Aplicația recomandată: Kahoot!

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui \mathbb{R}

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.1. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)

Repere!

Mulțimea numerelor naturale

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Mulțimea numerelor întregi

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Mulțimea numerelor raționale

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Mulțimea numerelor iraționale: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Definiție: Numerele care au partea zecimală infinită și neperiodică se numesc numere iraționale.

Dacă $p \in \mathbb{N}^*$ și p nu este pătrat perfect, atunci \sqrt{p} este număr irațional.

Exemple de numere iraționale:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{10}$$



Mulțimea numerelor reale

Definiție: Reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale formează mulțimea numerelor reale, notată cu \mathbb{R} .

$$R_+ = \{x \mid x > 0\} \quad - \quad \text{mulțimea numerelor reale pozitive}$$

$$R_- = \{x \mid x < 0\} \quad - \quad \text{mulțimea numerelor reale negative}$$

Atunci,

$$R = R_+ \cup R_-$$

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Dintre numerele **3, 14** ; $\sqrt{36}$; **-0, (3)** ; $\sqrt{7}$ irațional este numărul
2. Dați exemplu de un număr irațional x , cu proprietatea **$5 < x < 6$** .
3. Stabilește dacă numărul **0, 222222 ...** este rațional sau irațional.



Nivel 2

1. Partea întreagă a numărului **$-\sqrt{3}$** este
2. Determinați cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ pentru care numărul **$\sqrt{5n+4}$** nu este număr irațional.
3. Câte numere iraționale sunt în mulțimea **$M = \{\sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \dots \sqrt{49}; \sqrt{50}\}$** ?



Nivel 3

1. Câte numere naturale de forma \overline{abc} , pătrate perfecte, astfel încât **$\sqrt{0, a(bc)} + 0, c(ab) + 0, b(ca)$** să fie număr natural nenul există?
2. Perechile de cifre distincte (x, y) pentru care numărul **$\sqrt{1, (x)} + 4, (y)$** nu este irațional sunt
3. Valoarea lui x din proporția următoare este

$$\frac{x}{\sqrt{0,07(1)}} = \frac{\sqrt{1,13(7)}}{\sqrt{0,4096}}$$

Aplicații recomandate!

Aplicația: **Kahoot!**



Link: <https://create.kahoot.it/share/numere-irationale-exemple-multimea-numerelor-reale-incluziunile/c1445913-0a25-4089-b016-6a26f205621d>

- 17 -

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Aproximați numărul $\sqrt{5}$ cu două zecimale prin lipsă.
2. Dintre numerele $a = \sqrt{17}$, $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{22}$, $d = \sqrt{7}$ cel mai mare este numărul
3. Cel mai mic număr natural, care este mai mare ca $3\sqrt{5}$ este



Nivel 2

1. Aproximați numărul $\frac{\sqrt{7}}{2}$ cu două zecimale prin adaos.
2. Fie mulțimea $M = \{2\sqrt{3}, \sqrt{10}, 4, 3\sqrt{2}\}$. Cel mai mic element al mulțimii M este
3. Numerele întregi consecutive între care se află numărul $-7\sqrt{2}$ sunt



Nivel 3

1. Determinați numerele $m, n \in \mathbb{N}$, știind că \sqrt{m} și \sqrt{n} sunt reprezentate pe axa numerelor conform figurii de mai jos:



2. Fie A și B două puncte pe axa numerelor, cu coordonatele $A(-\sqrt{3})$ și $B(3 - \sqrt{3})$. Lungimea segmentului AB este
3. Fie A un punct pe axa numerelor cu coordonata $A(5 - \sqrt{2})$. Determinați lungimea segmentului format de punctul A și simetricul acestuia față de punctul O .

Aplicații recomandate!

Aplicația: [LearningApps](https://learningapps.org/view21334738)

[LearningApps.org](https://learningapps.org)

Link: <https://learningapps.org/view21334738>

Modulul unui număr real

Aplicația recomandată: Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui \mathbb{R}

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.1. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)

Repere!

Definiție: Modulul unui număr real x este distanța, pe axa numerelor, de la originea axei la punctul $A(x)$.

Notatie: $|x| = OA$, unde O este originea axei, iar A este punctul de reprezentare a numărului x pe axă.

Proprietăți ale modului:

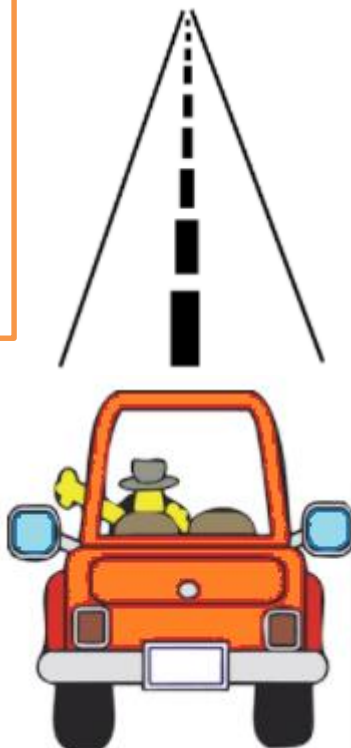
$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Exemplu: $|-2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}| = |-2\sqrt{5}| \cdot |\sqrt{2}|$

$$|-2\sqrt{10}| = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0$$

Exemplu: $\left| \frac{5\sqrt{7}}{-6\sqrt{2}} \right| = \frac{|5\sqrt{7}|}{|-6\sqrt{2}|} = \frac{5\sqrt{7}}{6\sqrt{2}}$



Explicitarea modului:

Modulul unui număr real x este:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Exemple:

$$|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

$$|-3\sqrt{3}| = -(-3\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$$

Inegalitatea triunghiului:

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Exemplu: $|\sqrt{4} + \sqrt{9}| \leq |\sqrt{4}| + |\sqrt{9}|$

$$|-2 + 3| \leq |-2| + |3|$$

$$|-1| \leq 2 + 3$$

$$1 \leq 5$$

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Calculați $|- \sqrt{2}|$.
2. Calculați $\left| -\frac{\sqrt{5}}{3} \right|$.
3. Calculați $|\sqrt{5} + 1|$.



Nivel 2

1. Calculați $|\sqrt{2} - 3|$.
2. Calculați $|- \sqrt{5} - 3|$.
3. Calculați $\left| \frac{2 - \sqrt{5}}{3} \right|$.



Nivel 3

1. Numărul elementelor mulțimii $M = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \leq \sqrt{5}\}$ este
2. Calculați $|(2\sqrt{15} - 8)|$.
3. Calculați $\left| -\frac{4\sqrt{6} - 10}{9 - 3\sqrt{10}} \right|$.

Aplicații recomandate!

Aplicația: Quizizz

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/612b5699d0ddc1001e60847c>

Quizizz

Adunarea și scăderea numerelor reale

Aplicația recomandată: Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale

CG 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

CS 6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale

Repere!

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a + b)\sqrt{x}$$

$$a\sqrt{x} - b\sqrt{x} = (a - b)\sqrt{x}$$

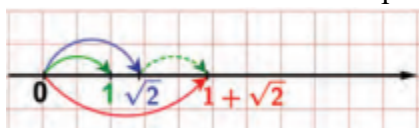
Pentru **a aduna** mai multe numere reale de forma $a\sqrt{b}$, $b \geq 0$, care au același număr sub radical, se adună factorii din fața radicalilor, iar rezultatul se înmulțește cu radicalul.

Pentru **a scădea** două numere reale de forma $a\sqrt{b}$, $b \geq 0$, care au același număr sub radical, se adună descăzutul la opusul scăzătorului.



Cum adunăm două numere reale?

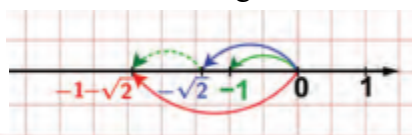
Suma a două numere reale pozitive este tot un număr real pozitiv.



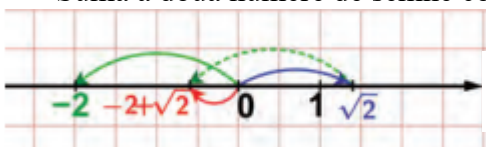
$$a = 1 \text{ și } b = \sqrt{2} \Rightarrow a + b = 1 + \sqrt{2}$$

Suma a două numere reale negative este tot un număr real negativ.

$$a = -1 \text{ și } b = -\sqrt{2} \Rightarrow a + b = -1 - \sqrt{2}$$



Suma a două numere de semne contrare:



$$a = \sqrt{2} \text{ și } b = -2 \Rightarrow a + b = \sqrt{2} - 2$$

Proprietățile adunării

comutativitatea:

$$a + b = b + a, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Exemplu:

$$\sqrt{7} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{7}$$

asociativitatea:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Exemplu:

$$(2 + \sqrt{2}) + \sqrt{5} = 2 + (\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

0 este element neutru:

$$a + 0 = 0 + a = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

Exemplu:

$$\sqrt{31} + 0 = 0 + \sqrt{31} = \sqrt{31}$$

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Calculați: $3\sqrt{6} + 7\sqrt{6}$.
2. Calculați $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$.
3. Calculați $5\sqrt{2} - (-2\sqrt{2}) + (-3\sqrt{2})$.



Nivel 2

1. Calculați $2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$.
2. Calculați $-(-8 + 3\sqrt{3}) - (-4\sqrt{3}) + (5 - \sqrt{3})$.
3. Calculați $3\sqrt{28} + (-5\sqrt{63}) - (-\sqrt{7})$.



Nivel 3

1. Calculați $\sqrt{3} + 1\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\sqrt{3} + 1, (3)$.
2. Calculați $0,7 \cdot \sqrt{500} - \left(\frac{3}{4}\sqrt{20} - 0, (3) \cdot \sqrt{45}\right)$.
3. Calculați $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| - |2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}| - (3\sqrt{3} - 4\sqrt{2})$.

Aplicații recomandate!

Aplicația: Quizizz

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/612b306376f09900210d1832>

<https://quizizz.com/admin/quiz/612b35f13eb1ef001d2c1613>

Quizizz

Înmulțirea numerelor reale

Aplicații recomandate: Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale

CG 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

CS 6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale

Repere!



Înmulțirea a două numere de forma $a\sqrt{n}$, cu n număr natural, $n \neq k^2$, k număr natural, se efectuează fie folosind aproximări ale radicalului, fie folosind următoarea regulă: $a\sqrt{n} \cdot b\sqrt{m} = a \cdot b\sqrt{n \cdot m}$.

Exemplu:

$$4\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{7} = 4 \cdot 5\sqrt{3 \cdot 7} = 20\sqrt{21}$$



Proprietățile înmulțirii:

comutativitatea:

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Exemplu:

$$2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

asociativitatea:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

Exemplu:

$$(\sqrt{11} \cdot 3) \cdot \sqrt{7} = \sqrt{11} \cdot (3 \cdot \sqrt{7}) \Rightarrow 3\sqrt{77} = 3\sqrt{77}$$

1 este element neutru:

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Exemplu:

$$1 \cdot \sqrt{101} = \sqrt{101} \cdot 1 = \sqrt{101}$$

distributivitatea față de adunare și scădere:

$$x \cdot (y \pm z) = x \cdot y \pm x \cdot z$$

Exemple:

$$\sqrt{5} \cdot (\sqrt{3} + 4) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{5} \cdot 4 = \sqrt{15} + 4\sqrt{5}$$

$$\sqrt{6} \cdot (\sqrt{11} - \sqrt{7}) = \sqrt{6} \cdot \sqrt{11} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{66} \cdot \sqrt{42}$$

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Calculați $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$.
2. Calculați $3\sqrt{5} \cdot 7\sqrt{2}$.
3. Calculați $6\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)$.



Nivel 2

1. Calculați $3\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \cdot (4\sqrt{15})$.
2. Calculați $(\sqrt{2} + 1) \cdot (4 - \sqrt{2})$.
3. Calculați $3 \cdot (\sqrt{20} + \sqrt{45}) - \sqrt{125}$.



Nivel 3

1. Calculați $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}) - 3\sqrt{6}$.
2. Calculați $3\sqrt{2} \cdot (5\sqrt{12} + 3\sqrt{18}) - 5\sqrt{3} \cdot (4\sqrt{2} + 4\sqrt{75})$.
3. Calculați $1, 4\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} - 0, (6) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})$.

Aplicatii recomandate!

Aplicația: Quizizz

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/612b41855f7b6b001dbe6f2b>

QUIZZ

Împărțirea numerelor reale

Aplicația recomandată: Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale

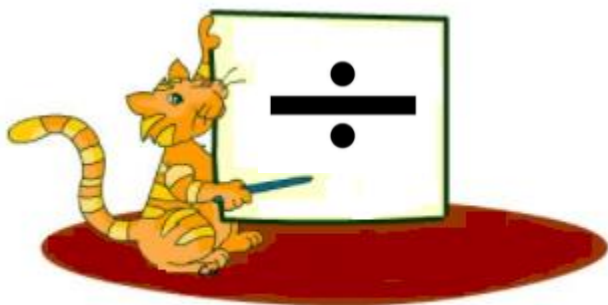
CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale

CG 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

CS 6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale

Repere!



Împărțirea între un număr rațional și un număr irațional se efectuează folosind o aproximare a numărului irațional.

Împărțirea a două numere de forma $a\sqrt{n}$, cu n număr natural, $n = k^2$, k număr natural, se efectuează fie folosind aproximări ale radicalului, fie folosind următoarea regulă:

$$(a\sqrt{n}) : (b\sqrt{m}) = (a : b)\sqrt{n : m}$$

Oricare ar fi $a \geq 0, b \geq 0$, $\frac{a\sqrt{n}}{b\sqrt{m}} = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{n}{m}}$.

Exemple:

$$(36\sqrt{15}) : (9\sqrt{5}) = (36 : 9)\sqrt{15 : 5} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{(49\sqrt{33})}{(7\sqrt{11})} = \left(\frac{49}{7}\right) \sqrt{\frac{33}{11}} = 7\sqrt{3}$$

ATENȚIE! Dacă este scris $a\sqrt{n} : b\sqrt{m}$ fără paranteze, nu se aplică regula de mai sus. Aici se respectă ordinea operațiilor, de la stânga spre dreapta: $a \cdot \sqrt{n} : b \cdot \sqrt{m}$.

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Calculați $\sqrt{35} : \sqrt{7}$.
2. Calculați $(-2\sqrt{18}) : (-\sqrt{6})$.
3. Calculați $\sqrt{0,5} : \sqrt{0,1}$.



Nivel 2

1. Calculați $\sqrt{\frac{3}{5}} : \sqrt{\frac{27}{5}}$.
2. Calculați $(\sqrt{8} - \sqrt{10}) : \sqrt{2}$.
3. Calculați $(\sqrt{18} - \sqrt{27}) : 3$.



Nivel 3

1. Calculați $(4\sqrt{10} + 2\sqrt{15}) : 2\sqrt{5}$.
2. Calculați $\frac{10\sqrt{3}:2}{4} - \frac{5\sqrt{15}:\sqrt{5}}{6}$.
3. Calculați $(\sqrt{0,08} + \sqrt{0,72}) : (\sqrt{0,18} + \sqrt{0,5} - \sqrt{0,32})$.

Aplicații recomandate!

Aplicația: Quizizz

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/612b4449260b93001d1994b3>

QUIZZ

Puteri cu exponent număr întreg

Aplicația recomandată: Kahoot!

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale

CG 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

CS 6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale

Repere!

Dacă n este un număr natural, atunci puterea a n -a a numărului real \sqrt{a} se notează cu $(\sqrt{a})^n$.

$$(\sqrt{a})^n = \underbrace{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \dots \cdot \sqrt{a}}_{n \text{ factori}}, \text{ unde } a > 0.$$

Dacă n este un număr natural și $a > 0$ un număr real, atunci:

$$(\sqrt{a})^{-n} = \frac{1}{(\sqrt{a})^n}.$$



Exemple: $(\sqrt{3})^3 = (\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$$(\sqrt{2})^{-5} = \frac{1}{(\sqrt{2})^5} = \frac{1}{(\sqrt{2})^4 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Reguli de calcul cu puteri:

- $a^1 = a, (\forall) a \neq 0$
- $a^0 = 1, (\forall) a \neq 0$
- 0^0 – nu are sens
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a : b)^n = a^n : b^n$

$$(\sqrt{a})^2 = |a|, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Calculați $\sqrt{5^2}$.
2. Calculați $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3^3} \cdot \sqrt{3^{-6}}$.
3. Calculați $(-\sqrt{2})^{61} : (\sqrt{2}^5)^{12}$.



Nivel 2

1. Calculați $(2\sqrt{3})^3$.
2. Calculați $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4}$.
3. Calculați $2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{6} \cdot 10^{-2} \cdot 20\sqrt{2} + \sqrt{5^0}$.



Nivel 3

1. Calculați $\sqrt{4^2 + 2^3} + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$.
2. Calculați $\sqrt{3,5}^{-5} \cdot \frac{\sqrt{7}^6}{\sqrt{2}^5}$.
3. Dacă $\sqrt{x^2} = x$ și $\sqrt{y^2} = -y$, unde $x, y \in \mathbb{R}$, calculați $(x - |x|)^{10} + (y - |y|)^{10}$.

Aplicații recomandate!

Aplicația: **Kahoot!**



Link: <https://create.kahoot.it/share/puteri-cu-exponent-numar-intreg/dbfae5aa-cf22-44d7-b25b-64c4b53513df>

Raționalizarea numitorului

Aplicația recomandată: Kahoot!

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale

CG 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

CS 6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale

Repere!



Definiție: Operația de **raționalizare** a numitorului unei fracții exprimat printr-un număr irațional de forma $a\sqrt{b}$ sau $a \in \mathbb{Q}^*, b \in \mathbb{Q}_+$, este operația în urma căreia, prin amplificarea fracției cu un factor, numitorul obținut se transformă într-un număr rațional:

$$\frac{\sqrt{b} \cdot c}{a\sqrt{b}} = \frac{c\sqrt{b}}{ab}, a \in \mathbb{Q}^*, b \in \mathbb{Q}_+$$

Exemplu: $\frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}.$

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Raționalizând numitorul fracției $\frac{4}{\sqrt{2}}$ se va obține
2. Raționalizând numitorul fracției $-\frac{1}{3\sqrt{2}}$ se va obține
3. Raționalizând numitorul fracției $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{24}}$ se va obține



Nivel 2

1. Raționalizați numitorul fracției $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$.
2. Calculați $\sqrt{3}^{-3} + \sqrt{3}^{-5}$.
3. Calculați $\sqrt{6}^{-3} + \frac{2}{3\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{2}$.



Nivel 3

1. Calculați valoarea numărului $N = 2\sqrt{6} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 2 \cdot (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$.
2. Comparați numerele $a = -\frac{3}{2\sqrt{5}}$ și $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Calculați $(\sqrt{3}^{-1} + \sqrt{5}^{-1}) : (\sqrt{10} + \sqrt{6})$.

Aplicații recomandate!

Aplicația: **Kahoot!**



Link: <https://create.kahoot.it/share/rationalizarea-numitorului/7acf0899-bd3a-4f40-9ae5-506517a49fec>

Ordinea efectuării operațiilor

Aplicația recomandată: LearningApps

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale

CG 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

CS 6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale

Repere!

Într-un exercițiu de calcul care conține mai multe operații cu numere reale, ordinea efectuării acestora este:

- ridicările la putere;
- înmulțirile și împărțirile, în ordinea în care sunt scrise;
- adunările și scăderile, în ordinea în care sunt scrise.



Într-un exercițiu de calcul ce conține paranteze, se efectuează mai întâi calculele din parantezele mici (rotunde), apoi cele din parantezele mari (drepte) și în final cele din acolade.

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Calculați $\sqrt{2} + \sqrt{28} : \sqrt{14}$.
2. Calculați $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \sqrt{6}$.
3. Calculați $\sqrt{12} : \sqrt{3} + \sqrt{32} : \sqrt{2} - \sqrt{3^2 + 4^2}$.



Nivel 2

1. Calculați $\sqrt{24} + (2\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + \sqrt{27}) \cdot \sqrt{2}$.
2. Calculați $\sqrt{2 + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{4}{16+9}} \cdot \sqrt{0,36}^{-1}$.
3. Calculați $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{32}} + \sqrt{\frac{49}{8}} - \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}}$.



Nivel 3

1. Calculați $\sqrt{(4\sqrt{2} - 6)^2} + \sqrt{(3\sqrt{2} - 4)^2}$.
2. Determinați valoarea expresiei $(x + 2y + 1)^{2019}$
unde $x = 4 \cdot |1 - \sqrt{3}|$ și $y = 1 - 2\sqrt{3}$.
3. Determinați natura numărului $N = \sqrt{2,3(5) + 3,5(2) + 5,2(3)}$.

Aplicații recomandate!

Aplicația: **Learning Apps**

[LearningApps.org](https://learningapps.org)

Link: <https://learningapps.org/view21337326>

Media aritmetică ponderată a n numere reale. Media geometrică a două numere reale pozitive

Aplicația recomandată: Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale

CG 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

CS 6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale

Repere!

Definiție: Media geometrică sau media proporțională a două numere nenegative este egală cu rădăcina pătrată din produsul lor.

Dacă $a > 0, b > 0$, atunci $m_g = \sqrt{a \cdot b}$.

Dacă $0 < a \leq b$, atunci $a \leq m_g \leq b$.



Exemplu: $a = 2$ și $b = 8$

$$\Rightarrow m_g = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

Definiție: Media aritmetică ponderată a numerelor a_1, a_2, \dots, a_n având ponderile p_1, p_2, \dots, p_n se calculează după formula:

$$m_p = \frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \dots + a_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}.$$

Exemplu: $a_1 = -3$ și $a_2 = 5$

$p_1 = 4$ și $p_2 = 6$

$$\Rightarrow m_p = \frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2}{p_1 + p_2} = \frac{-3 \cdot 4 + 5 \cdot 6}{4 + 6} = \frac{18}{10} = 1,8$$

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Media aritmetică a numerelor $\sqrt{12}$ și $\sqrt{48}$ este
2. Media geometrică a numerelor 5 și 180 este
3. Media aritmetică ponderată a numerelor 9; 5 și 6 cu ponderile 1; 3 și 2 este



Nivel 2

1. Media geometrică a numerelor $\sqrt{27}$ și $\sqrt{12}$ este
2. Media geometrică a numerelor x și 3 este 6. Valoarea numărului x este
3. Determinați valoarea numărului x , dacă media aritmetică ponderată a numerelor 2; x și 5 cu ponderile 3; 8 și 4 este 2,5.



Nivel 3

1. Determinați numerele a și b , știind că b este de 36 ori mai mare ca a și media lor geometrică este 18.
2. Determinați valoarea numărului x din relația $\frac{m_a}{m_g} = \frac{15\sqrt{6}}{x}$, unde m_a și m_g sunt media aritmetică, respectiv geometrică a numerelor a și b .

$$a = 2\frac{1}{4} \cdot [2, (3) + 3^{-1}] \text{ și } b = 5\frac{2}{3} : \left[0, 1(6) + \sqrt{1\frac{9}{16}} \right]$$
3. Fie a și b două numere naturale relativ prime ($a > 1; b > 1$). Determinați media lor aritmetică, știind că media lor geometrică este 6.

Aplicații recomandate!

Aplicația: [Quizizz](https://quizizz.com/admin/quiz/612b535f88dfa7001d4a4385)

QUIZIZZ

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/612b535f88dfa7001d4a4385>

Ecuatii de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$

Aplicația recomandată: Kahoot!

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale

CG 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

CS 6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale

Repere!

A rezolva o ecuație de forma $x^2 = a$, cu $a \in \mathbb{R}$, în mulțimea $P \subseteq \mathbb{R}$, înseamnă a determina toate valorile $x_0 \in P$ pentru care propoziția $x_0^2 = a$ este adevărată.

Valorile găsite, dacă există, se numesc **soluții ale ecuației**, iar mulțimea lor, notată de obicei cu S , se numește **mulțimea soluțiilor ecuației**.

Rezolvarea ecuației $x^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$ necesită analiza a trei cazuri:

- dacă $a < 0$, atunci $S = \emptyset$, deoarece $x^2 \geq 0 > a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
- dacă $a = 0$, atunci ecuația devine $x^2 = 0$, având soluție unică $x = 0$. Deci, $S = \{0\}$.
- dacă $a > 0$, atunci ecuația $x^2 = a$ se poate scrie sub forma $x^2 - a = 0$, adică $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$, având soluțiile: $x_1 = -\sqrt{a}$ și $x_2 = \sqrt{a}$, adică $S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$.

Exemple:

- $x^2 = -3$ nu are soluții reale $\Rightarrow S = \emptyset$
- $x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = \sqrt{4} = 2$ sau $x_2 = -\sqrt{4} = -2$
- $x^2 = 108 \Rightarrow x_1 = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ sau $x_2 = -\sqrt{108} = -6\sqrt{3}$



Pot să aplic!



Nivel 1

1. Rezolvați pe mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 = 16$.
2. Rezolvați pe mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 = 2,89$.
3. Rezolvați pe mulțimea numerelor reale ecuația $2x^2 = 72$.



Nivel 2

1. Rezolvați pe mulțimea numerelor reale ecuația $4x^2 - 9 = 0$.
2. Rezolvați pe mulțimea numerelor reale ecuația $4x^2 + 5 = 30$.
3. Rezolvați pe mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{2x}{0,45} = \frac{10}{x}$.



Nivel 3

1. Aria unui dreptunghi este de 288 cm^2 . Calculați perimetrul acestuia, știind că, lungimea (L) este dublul lățimii (l).
2. Rezolvați pe mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{x}{1+5\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5 \cdot (-4)^2 + 4^0}}{x}$.
3. Rezolvați pe mulțimea numerelor reale ecuația $53x^2 - 1 = 4 + 7 + 11 + \dots + 52$.

Aplicații recomandate!

Aplicația: **Kahoot!**



Link: <https://create.kahoot.it/share/ecuatia-de-forma-x2-a-unde-a/2637c3cf-df70-4f6e-8684-15783acc3612>

Capitolul II. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII

Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

Aplicația recomandată: Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare

Repere!

Proprietățile relației de egalitate. Fie a, b, c, d numere reale.



1. dacă $a = b$, atunci $a + c = b + c$

Exemplu: $x = y \mid + 2 \Rightarrow x + 2 = y + 2$



2. dacă $a = b$, atunci $a - c = b - c$

Exemplu: $x = y \mid - 5 \Rightarrow x - 5 = y - 5$



3. dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a + c = b + d$

Exemplu: $\begin{matrix} x = y \\ a = b \end{matrix} \Rightarrow x + a = y + b$



4. dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a - c = b - d$

Exemplu: $\begin{matrix} x = y \\ a = b \end{matrix} \Rightarrow x - a = y - b$



5. dacă $a = b$, atunci $a \cdot c = b \cdot c$

Exemplu: $x = y \mid \cdot 7 \Rightarrow x \cdot 7 = y \cdot 7$



6. dacă $a = b$ și $c \neq 0$, atunci $a : c = b : c$

Exemplu: $x = y \mid : 4 \Rightarrow x : 4 = y : 4$

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Dacă $x - 7y = 5$, atunci valoarea expresiei $4x - 28y$ este
2. Dacă $x - 7y = 5$, atunci valoarea expresiei $14y - 2x$ este
3. Dacă $x - 7y = 5$, atunci valoarea expresiei $21y - 3x + 30$ este



Nivel 2

1. Dacă $6a + 18b + 12c = 36$, atunci valoarea expresiei $a + 3b + 2c$ este
2. Dacă $a + b = 2$, $a + c = 0$ și $b + c = 4$, valoarea expresiei $a + b + c$ este
3. Dacă $5x + 15y + 10z = 30$, valoarea expresiei $3x + 9y + 6z$ este



Nivel 3

1. Dacă $\frac{2x+y}{x+3y} = \frac{3}{4}$, calculați $\frac{x}{y}$.
2. Dacă $x + 3y = 49$ și $x + 5y = 81$, valoarea expresiei $x + 4y$ este
3. Dacă $2a + b = 5$ și $4ax + 2bx + 2 = 22$, determinați valoarea lui x .

Aplicații recomandate!

Aplicația: **Quizizz**

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/61d4660f57c166001dda9d2b>

Quizizz

Ecuatii de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Aplicații recomandate: Math Tests, GeoGebra, Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare

Repere!

Definiție: **Ecuația** este o egalitate care conține una sau mai multe litere și care este adevărată pentru anumite valori date literelor.

Observație: Ecuația fiind o egalitate, semnul „=” trebuie să apară o singură dată.

$$ax + b = 0, x \in \mathbb{R}$$

a – coeficientul necunoscutei

x – necunoscuta

b – termenul liber

\mathbb{R} – mulțimea în care necunoscuta ia valori

Exemplu: $2x - 5 = 0$ 2 – coeficientul necunoscutul

-5 – termenul liber

$$x = -\frac{5}{2}$$

Definiție: Numim **soluție a ecuației** un număr din mulțimea în care necunoscuta ia valori, care, pus în locul necunoscutei, face ca egalitatea să fie adevărată.



CUM REZOLVĂM O ECUATIE DE GRADUL ÎNTÂI?

Fie ecuația: $\frac{x-2}{4} + \frac{2}{3} = x - \frac{4}{3}$

Pasul 1. Eliminăm numitorii

$$\frac{x-2}{4} + \frac{2}{3} = x - \frac{4}{3} \quad | \cdot 12$$

$$3(x-2) + 4 \cdot 2 = 12x - 4 \cdot 4$$

$$3(x-2) + 8 = 12x - 16$$

Pasul 2. Desființăm parantezele

$$3x - 6 + 8 = 12x - 16$$

$$3x + 2 = 12x - 16$$

Pasul 4. Efectuăm calcule

$$-9x + 18 = 0$$

Pasul 3. Separăm termenii

$$3x + 2 - 12x + 16 = 0$$

Pasul 5. Determinăm soluția

$$-9x = -18$$

$$x = 2$$

Definiție: Două ecuații se numesc **echivalente** dacă au aceleași soluții.

$$8x - 16 = 0$$

$$\sqrt{3}x - \sqrt{12} = 0$$

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Soluția ecuației $2x + 5 = 17, x \in \mathbb{R}$ este
2. Mulțimea soluțiilor ecuației $2 \cdot (2x + 1) = 4, x \in \mathbb{Z}$ este
3. Soluția ecuației $2x + 4 \cdot (x - 1) = 5x, x \in \mathbb{R}$ este



Nivel 2

1. Rezolvând ecuația $\frac{x-2}{3} - \frac{x-4}{6} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, x \in \mathbb{R}$ se obține soluția
2. Soluția ecuației $(3\sqrt{6}x + \sqrt{12}) : \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{6}}, x \in \mathbb{R}$ este
3. Rezolvând ecuația $\sqrt{2}(x + 2\sqrt{2}) + \sqrt{3}(1 - x\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{3}, x \in \mathbb{R}$ se obține soluția



Nivel 3

1. Soluția ecuației $x \cdot \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} - 2x, x \in \mathbb{R}$ este
2. Cifra x , unde $\overline{0, (x1)} + \overline{0, (x2)} + \overline{0, (x3)} = 1\frac{3}{11}$ ia valoarea
3. Rezolvând ecuația $x - 2x + 3x - 4x + \dots + 49x - 50x = 5, x \in \mathbb{Q}$ se obține

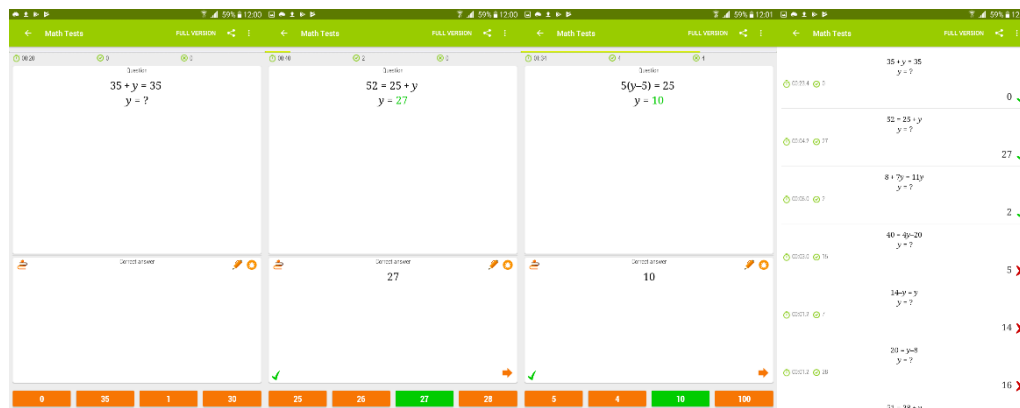
Aplicații recomandate!

Aplicația: **Math Tests**

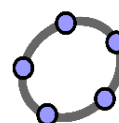


Se accesează aplicația **Math Tests** și se selectează:

- „Tests” = Teste
- „Variable equations” = Ecuații
- „One-step variable equations with adding/subtracting”
- „One-step variable equations with multipl./division”
- „Express y from the equation (easy)”
- „Multi-step equations with all the operations (easy)”
- „Multi-step equations with all the operations (difficult)”
- „Start test” = Începe testul



Aplicația: **GeoGebra**






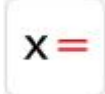
$$\frac{x+5}{5} - \frac{x-3}{4} = \frac{3x}{10} - \frac{x-1}{4}$$

Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier *GeoGebra*;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare Algebrică* și apoi *CAS*.

Paşı:

1	$\frac{x+5}{5} - \frac{x-3}{4} = \frac{3x}{10} - \frac{x-1}{4}$
2	$\sqrt{\frac{x+5}{5} - \frac{x-3}{4} = \frac{3x}{10} - \frac{x-1}{4}}$
3	$\frac{x+5}{5} - \frac{x-3}{4} = \frac{3x}{10} - \frac{x-1}{4}$
4	$\rightarrow -\frac{1}{20}x + \frac{7}{4} = \frac{1}{20}x + \frac{1}{4}$
5	$\frac{-1}{20}x + \frac{7}{4} = \frac{1}{20}x + \frac{1}{4}$
6	$\approx -0.05x + 1.75 = 0.05x + 0.25$
7	$-0.05x + 1.75 = 0.05x + 0.25$
8	Rezolvă: {x = 15}
9	De intrare...

1.		Se introduc în bara de intrare, de la tastatură, ecuația pe care doriți să o rezolvați.
2.		Păstrare Input Împiedică simplificarea automată.
3.		Selectați pasul anterior
4.		Evaluează Se rezolvă ecuația în mod explicit.
5.		Selectați pasul anterior
6.		Numeric Frațiile ordinare se transformă în fracții zecimale.
7.		Rezolvă Se determină soluțiile ecuației.

Quizizz

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/61d47888a6e5c001dd013f4>

Sisteme de ecuații liniare. Metoda substituției

Aplicația recomandată: Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare

Repere!

Definiție: Ansamblul a două ecuații liniare cu două necunoscute x și y scris sub forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}, \text{ unde } a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

se numește **sistem de două ecuații cu două necunoscute**.

Definiție: Perechea ordonată (u, v) , unde $u, v \in \mathbb{R}$ se numește **soluție** a sistemului dacă $a_1u + b_1v + c_1 = 0$ și $a_2u + b_2v + c_2 = 0$.

Exemplu:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3 = 0 \\ 14x - 3y = -5 \end{cases}$$



REZOLVAREA SISTEMULUI DE ECUAȚII PRIN METODA SUBSTITUTIEI

Etapele principale ale rezolvării unui sistem prin metoda substituției sunt:

exprimarea uneia dintre necunoscute dintr-o ecuație în funcție de cealaltă necunoscută;	$\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 14x - 3y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y + 3 \\ 14x - 3y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2y + 3}{3} \\ 14x - 3y = -5 \end{cases}$
substituirea necunoscutei respective în cealaltă ecuație a sistemului, care devine astfel o ecuație cu o singură necunoscută;	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2y + 3}{3} \\ 14 \cdot \frac{2y + 3}{3} - 3y = -5 \end{cases}$
rezolvarea ecuației cu o necunoscută;	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2y + 3}{3} \\ 28y + 42 - 9y = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2y + 3}{3} \\ 19y = -57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2y + 3}{3} \\ y = -3 \end{cases}$
aflarea celeilalte necunoscute și determinarea mulțimii soluțiilor sistemului.	$\begin{cases} x = \frac{2 \cdot (-3) + 3}{3} \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Soluția sistemului $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x - 6y = 8 \end{cases}$ este
2. Rezolvând sistemul $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$ obținem soluția
3. Rezolvând sistemul $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$ obținem soluția



Nivel 2

1. Soluția sistemului $\begin{cases} 2(x + y) - 3y = -11 \\ -4x + 3(x + y) = 18 \end{cases}$ este
2. Soluția sistemului $\begin{cases} \frac{2x+y}{3} - y = -2\frac{2}{3} \\ \frac{3x-y}{2} + 2y = 0 \end{cases}$ este
3. Rezolvând sistemul $\begin{cases} (x + 2)(y - 3) = (x - 3)(y + 2) + 30 \\ x(2x - y + 1) = 2x^2 - x(y - 2) - 13 \end{cases}$ obținem soluția



Nivel 3

1. Soluția sistemului $\begin{cases} (\sqrt{3} - 2)x + (\sqrt{3} + 2)y = 2\sqrt{3} \\ \frac{x}{\sqrt{3}-2} + \frac{y}{\sqrt{3}+2} = -2\sqrt{3} \end{cases}$ este
2. Soluția sistemului $\begin{cases} \frac{2}{x+2y} + \frac{15}{4x-y} = 2 \\ \frac{6}{x+2y} + \frac{5}{4x-y} = -2 \end{cases}$ este
3. Soluția sistemului $\begin{cases} \frac{2}{x+y-3} + \frac{7}{x-y+1} = -\frac{7}{3} \\ \frac{5}{x+y-3} + \frac{6}{x-y+1} = -\frac{13}{3} \end{cases}$ este

Aplicatii recomandate!

Aplicația: Quizizz

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/61d485d357c166001ddac14d>

QUIZZ

Sisteme de ecuații liniare. Metoda reducerii

Aplicația recomandată: Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare

Repere!

Exemplu:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3 = 0 \\ 14x - 3y = -5 \end{cases}$$



Definiție: Ansamblul a două ecuații liniare cu două necunoscute x și y scris sub forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}, \text{ unde } a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

se numește **sistem de două ecuații cu două necunoscute**.

Definiție: Perechea ordonată (u, v) , unde $u, v \in \mathbb{R}$ se numește **soluție** a sistemului dacă $a_1u + b_1v + c_1 = 0$ și $a_2u + b_2v + c_2 = 0$.

REZOLVAREA SISTEMULUI DE ECUAȚII PRIN METODA REDUCERII

Etapele principale ale rezolvării unui sistem prin metoda reducerii sunt:

înmulțirea fiecărei ecuații cu câte un număr, astfel încât prin adunarea ecuațiilor obținute termenii care conțin una dintre necunoscute să se reducă;	$\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 14x - 3y = -5 \end{cases} \begin{matrix} \cdot (-3) \\ \cdot 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x + 6y = -9 \\ 28x - 6y = -10 \end{cases}$ $19x = -19$
rezolvarea ecuației obținute după reducerea uneia dintre necunoscute;	$\Leftrightarrow \begin{cases} 19x = -19 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 3 \cdot (-1) - 2y = 3 \end{cases}$
reducerea celeilalte necunoscute în mod asemănător sau aflarea acesteia prin metoda substituției și determinarea mulțimii soluțiilor sistemului.	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -3 - 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Soluția sistemului $\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases}$ este
2. Soluția sistemului $\begin{cases} 2x + 3(y + 1) = 8 \\ 5(x + y) - y = 2 \end{cases}$ este
3. Soluția sistemului $\begin{cases} 3(x + 2y) - 2(2x + y - 3) + 5 = 21 \\ 5(x - y + 1) = 4(x + y + 2) - 23 \end{cases}$ este



Nivel 2

1. Soluția sistemului $\begin{cases} \frac{x+3}{4} = \frac{y+5}{6} \\ \frac{x-7}{2} = \frac{5-2y}{9} \end{cases}$ este perechea
2. Soluția sistemului $\begin{cases} \frac{3x-2y}{2} + \frac{2x-3y}{3} = \frac{1}{6} \\ \frac{3x-2y}{3} + \frac{2x-3y}{2} = \frac{1}{6} \end{cases}$ este
3. Rezolvând sistemul $\begin{cases} 0,5x + y = -1 \\ \frac{3}{2}x - 0,3y = 7 \end{cases}$ se obține soluția



Nivel 3

1. Soluția sistemului $\begin{cases} x(\sqrt{2} - 1) + y(2 - \sqrt{3}) = x\sqrt{2} - y\sqrt{3} + 4 \\ x(\sqrt{3} - 1) + y(\sqrt{2} + 1) = x\sqrt{3} + y\sqrt{2} + 1 \end{cases}$ este
2. Rezolvând sistemul $\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{7}{y} = -2 \\ \frac{8}{x} - \frac{9}{y} = 17 \end{cases}$ se obține soluția

3. Rezolvând sistemul $\begin{cases} 4x - 2y + \frac{1}{x+3y} = -5\frac{1}{2} \\ 6x - 3y + \frac{2}{x+3y} = -8 \end{cases}$ se obține soluția

Aplicatii recomandate!

Aplicația: Quizizz

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/61d48eb957c166001ddac96f>



Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

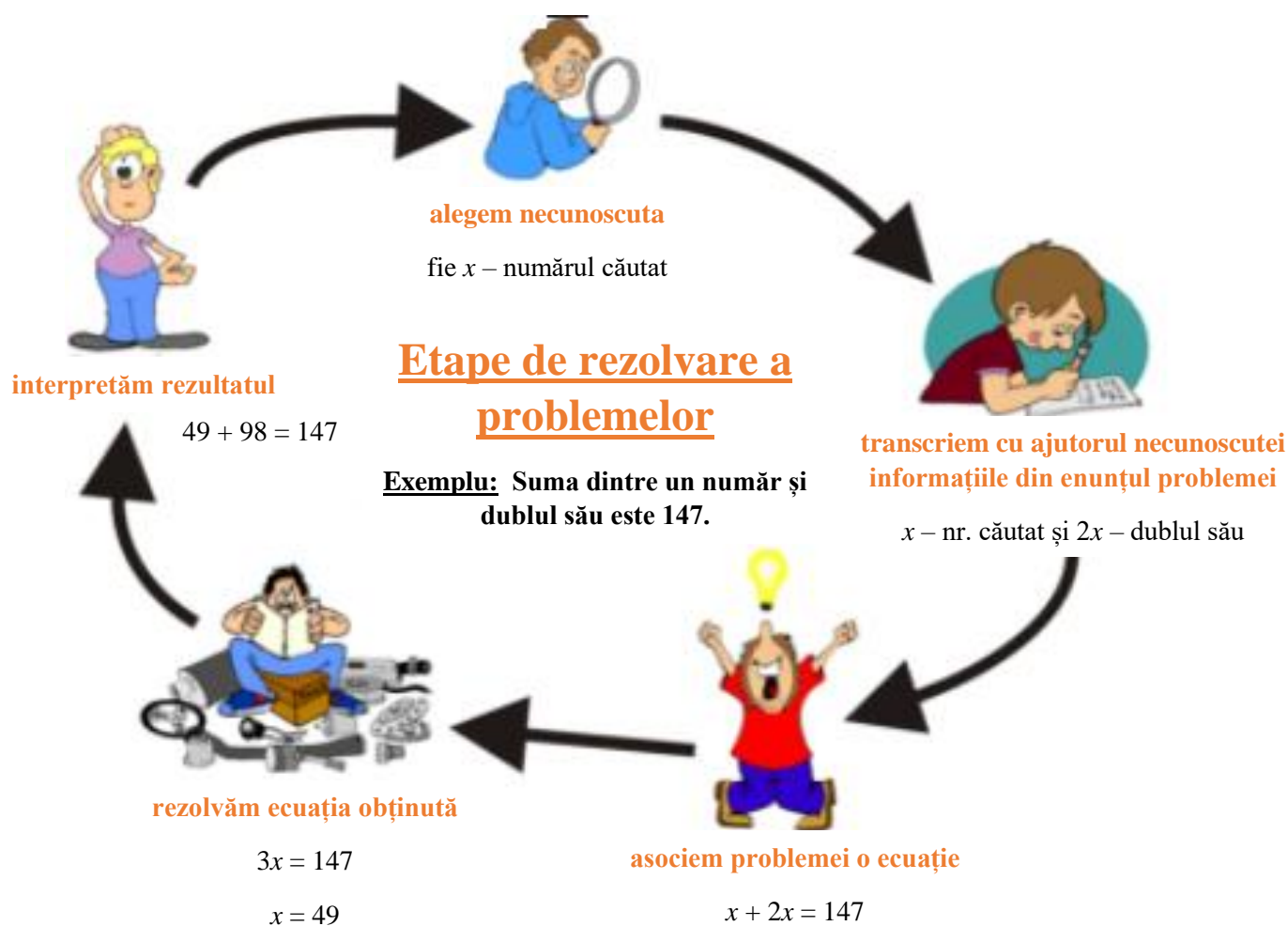
CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare

Repere!



Pot să aplic!



Nivel 1

1. Suma a trei numere naturale consecutive este 39. Determinați aceste numere.
2. Suma a trei numere naturale impare consecutive este 51. Determinați aceste numere.
3. Să se afle două numere naturale știind că suma lor este 1240 și al doilea este mai mare cu 24 decât triplul primului număr.



Nivel 2

1. Din dublul unui număr s-a scăzut 20. Rezultatul a fost împărțit la 30, iar la noul rezultat s-a adunat 13. Împărțindu-l pe 75 la noul rezultat se obține câtul 5. Să se afle numărul.
2. Suma a trei numere este 1032. Să se afle numerele știind că al doilea este triplul primului, iar al treilea este cu 60 mai mare ca jumătate din primul număr.
3. Un elev are în biblioteca personală 153 cărți. Pe raftul din mijloc sunt cu 5 cărți mai multe decât pe cel de jos și cu 8 cărți mai puține decât pe raftul de sus. Câte cărți sunt pe fiecare raft?



Nivel 3

1. Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporționale cu numerele 3; 4 și 5. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului.
2. Traseul unei excursii a fost străbătut în patru etape în felul următor: în prima etapă $\frac{2}{7}$ din întreg drumul; în etapa a doua $\frac{1}{4}$ din ce a rămas de parcurs; în etapa a treia $\frac{1}{3}$ din restul drumului, iar în ultima etapă 200 km. Ce lungime avea întregul traseu?
3. Tatăl este de trei ori mai în vârstă decât fiul. Peste 12 ani, tatăl va avea o vârstă egală cu dublul vârstei fiului său. Câți ani are fiecare?

Probleme care se rezolvă cu ajutorul sistemelor de ecuații

Aplicația recomandată: Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

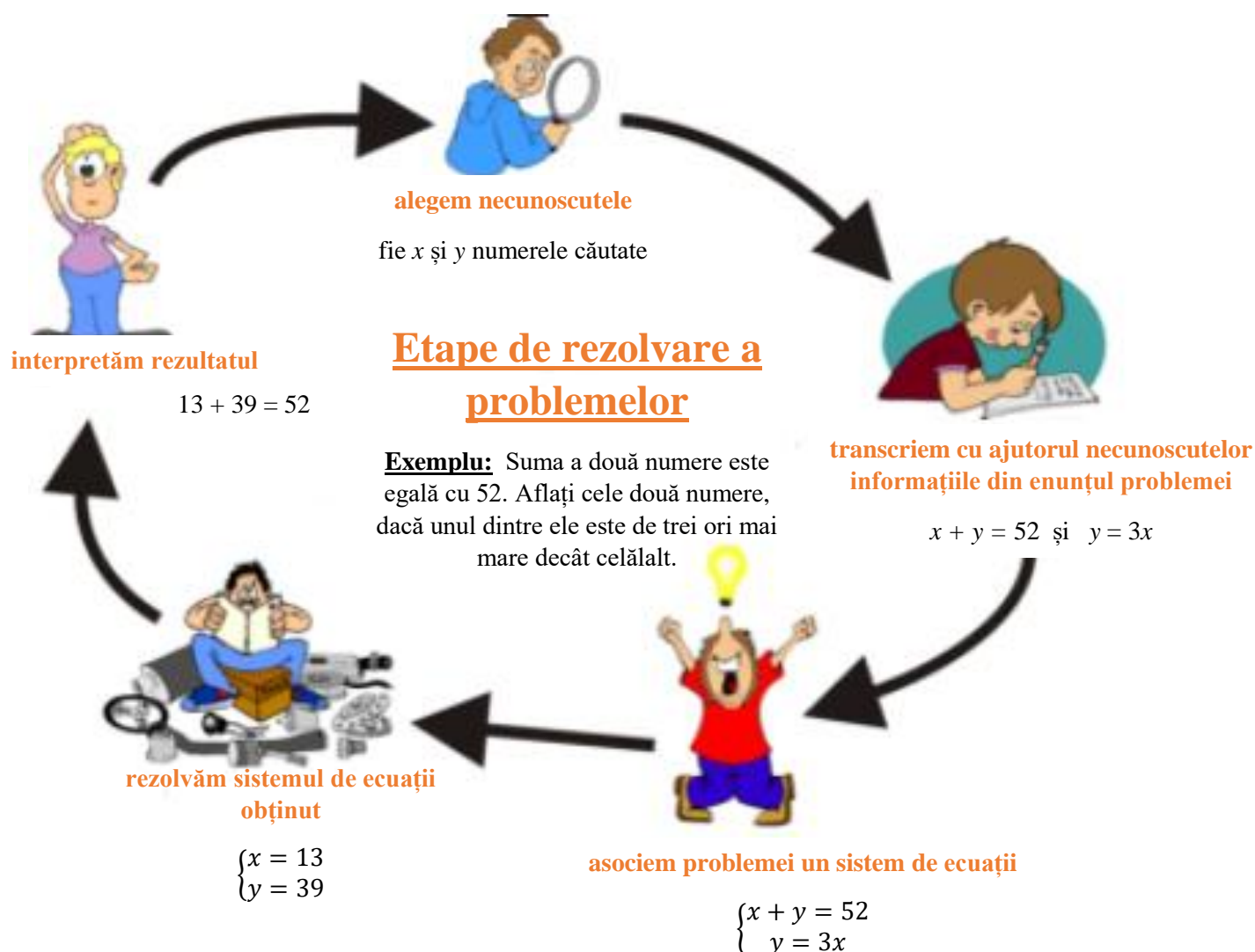
CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare

Repere!



Pot să aplic!



Nivel 1

1. Suma a două numere este 303, iar diferența lor 19. Determinați numerele.
2. Suma a două numere este 101. Determinați numerele știind, că unul este dublul celuilalt.
3. Să se afle două numere naturale știind că suma lor este 67 și împărțind pe primul la al doilea obținem câtul 4 și restul 7.



Nivel 2

1. Suma a două numere naturale este 429. Aflați numerele știind că diferența dintre cel mai mare și dublul celui mai mic este 114.
2. Suma a două numere este 276. Să se afle numerele știind că 75% din primul este $\frac{2}{5}$ din al doilea.
3. Raportul a două numere este 1,25. Aflați numerele știind că unul este de două ori mai mare decât diferența dintre celălalt număr și 6.



Nivel 3

1. Într-o școală sunt 720 elevi, băieți și fete. Să se afle câte fete și câți băieți sunt în școală știind că 80% din numărul fetelor este cu 9 mai mic decât jumătate din numărul băieților.
2. Într-un bloc sunt 40 de apartamente cu două și trei camere. Știind că în acel bloc sunt 90 de camere, aflați câte apartamente sunt cu două și câte cu trei camere.
3. Aflați perimetrul unui dreptunghi știind că lățimea este de 7 ori mai mică, decât suma dintre lungime și lățime, iar lungimea este cu 8 mai mare decât dublul lățimii.

Aplicații recomandate!

Aplicația: **Quizizz**



Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/61d49a8491a610001d92a656>



RECAPITULARE – Ecuatii și sisteme de ecuații

Aplicația: Quizizz

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/5c4a3bd9e11d53001bd92ee9/ecuaii-i-inecuaii>



Capitolul III. PROBLEME DE ORGANIZARE A DATELOR

Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale

Aplicații recomandate: Quizizz, Math Tests

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.3. Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependențe funcționale și reprezentări ale acestora

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.3. Analizarea unor situații practice prin elemente de organizare a datelor

Repere!

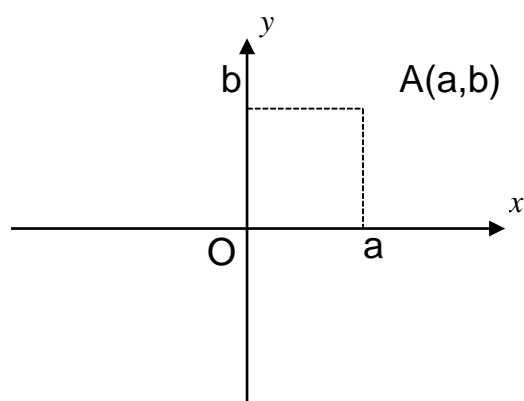
Definiție: Fie mulțimile A și B nevide.

Produsul cartezian al mulțimilor A și B , în această ordine, este mulțimea tuturor perechilor (x,y) cu x din A și y din B .

Matematic, $A \times B = \{(x,y), x \in A \text{ și } y \in B\}$.

Ne amintim!

O **axă a numerelor** este o dreaptă pe care s-a luat un punct fix, numit origine, un sens pozitiv și o unitate de măsură. Numerele negative se reprezintă la stânga originii iar cele pozitive la dreapta originii.



Definiție: Două axe perpendiculare Ox și Oy , cu aceeași origine, constituie **un sistem ortogonal** de axe de coordonate, xOy .

- O este originea sistemului de axe;
- Ox este axa absciselor;
- Oy este axa ordonatelor.

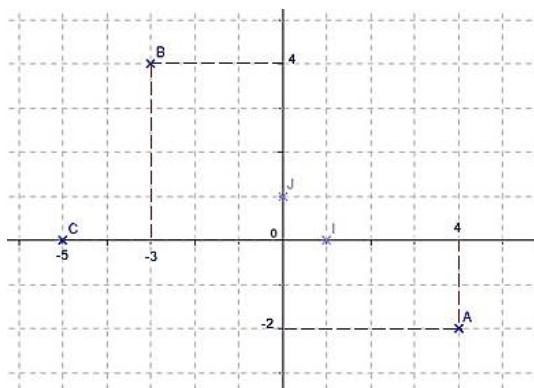
Poziția unui punct A din plan, în sistemul xOy , este determinată de două numere a și b numite **coordonatele punctului**.

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Fie mulțimea $M = \{1; 2\}$. Calculați produsul cartezian $M \times M$.
2. Determinați coordonatele punctului B reprezentat în figura de mai jos.



3. Fie mulțimile $A = \{1; 2; 3\}$ și $B = \{a; b\}$. Câte elemente are mulțimea $A \times B$?



Nivel 2

1. Fie punctele $A(4;5)$ și $B(4; 8)$ într-un sistem de axe ortogonale. Determinați poziția segmentului AB față de axa Oy .
2. Fie punctul $P(-5; -3)$ în sistemul de axe ortogonale. Coordonatele punctului P' , care este simetricul punctului P în raport cu axa Ox sunt
3. Fie punctul $P(-7; 4)$ în sistemul de axe ortogonale. Coordonatele punctului P' , care este simetricul punctului P în raport cu axa Oy sunt



Nivel 3

1. Fie punctul $P(-2; 4)$ în sistemul de axe ortogonale. Coordonatele punctului P' , care este simetricul punctului P în raport cu punctul O sunt

2. Fie punctele $A(-3;5)$ și $B(3; 7)$ într-un sistem de axe ortogonale. Determinați poziția punctului M care are ca și coordonate media aritmetică a coordonatelor punctelor A și B .
3. Fie punctul $P(-4; -3)$ în sistemul de axe ortogonale. Fie P_x simetricul lui P în raport cu axa Ox , P_y în raport cu axa Oy și P_0 în raport cu punctul O . Ce patrulater este figura formată din punctele P, P_x, P_y și P_0 ?

Aplicații recomandate!

Aplicația: **Quizizz**



Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/61d42ac6004b58001d87bd30>

Aplicația: **Math Tests**

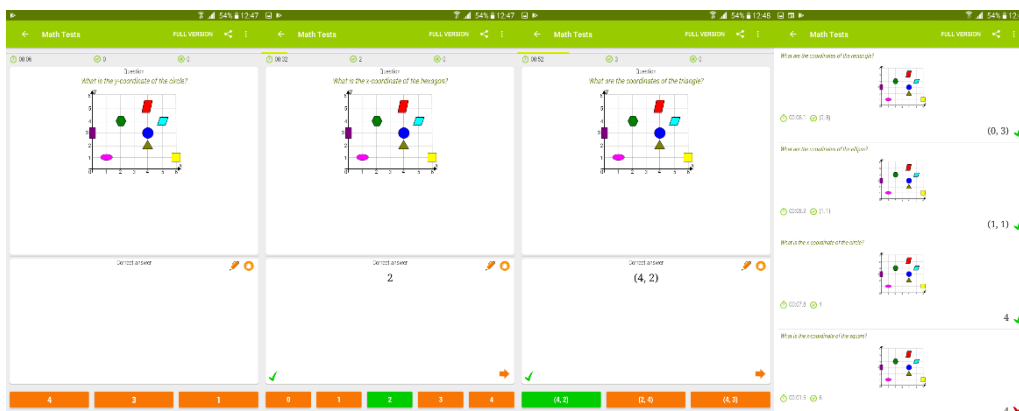


Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale

Reguli:

Se accesează aplicația **Math Tests** și se selectează:

- „Tests” = Teste
- „Coordinate plane” = Coordonate plane
- „Objects on coordinate plane” = Obiecte în coordonate plane
- „Start test” = Începe testul



Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale. Distanța dintre două puncte din plan

Aplicații recomandate: GeoGebra, Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.3. Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor

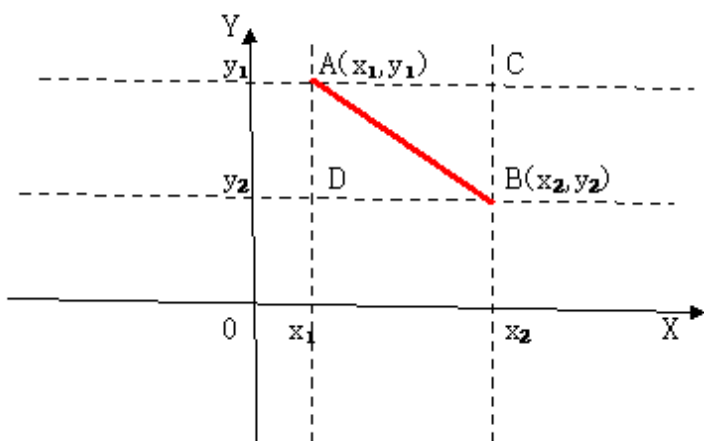
CG 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

CS 6.3. Transpunerea unei situații date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)

Repere!

Definiție: Fie punctele $A(a)$ și $B(b)$ pe axa Ox .

Distanța de la A la B este lungimea segmentului $[AB]$ și este egală cu modulul diferenței coordonatelor punctelor A și B , adică $AB = |a - b|$.



Distanța dintre punctele $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$ este lungimea segmentului $[AB]$.

Pentru a afla această distanță ducem prin A și B paralele la cele două axe. Cele 4 paralele formează (determină) un dreptunghi $ACBD$.

Pot să aplic!



Nivel 1

1. Fie punctul $A(4; 3)$. Distanța dintre originea axelor de coordonate și punctul A este
2. Fie punctele $A(9; 5)$ și $B(3; -3)$. Lungimea segmentului AB este
3. Fie punctul $P(-4; 6)$. Lungimea segmentului PP' , unde P' este simetricul punctului P față de axa Ox este



Nivel 2

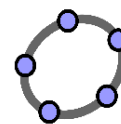
1. Perimetrul pătratului $OABC$, unde O este originea axelor de coordonate, $A(4; 0)$, $B(4; 4)$ și $C(0; 4)$, este
2. Perimetrul triunghiului ABC , unde $A(-3; -4)$, $B(6; 8)$ și $C(-3; 8)$ este
3. Aria rombului $ABCD$, unde $A(0; 4)$, $B(-3; 0)$, $C(0; -4)$ și $D(3; 0)$ este



Nivel 3

1. Lungimea liniei mijlocii a trapezului $ABCD$, unde $A(-5; 0)$, $B(4; 0)$, $C(2; 6)$ și $D(-3; 6)$ este ...
2. Fie punctele $A(-3; -2)$, $B(0; 2)$ și $C(4,5; 8)$ într-un sistem de axe ortogonale. Determinați poziția relativă a punctelor A , B și C .
3. Aria triunghiului ABC , unde $A(2; 5)$, $B(-6; 0)$ și $C(4; 0)$ este

Aplicații recomandate!



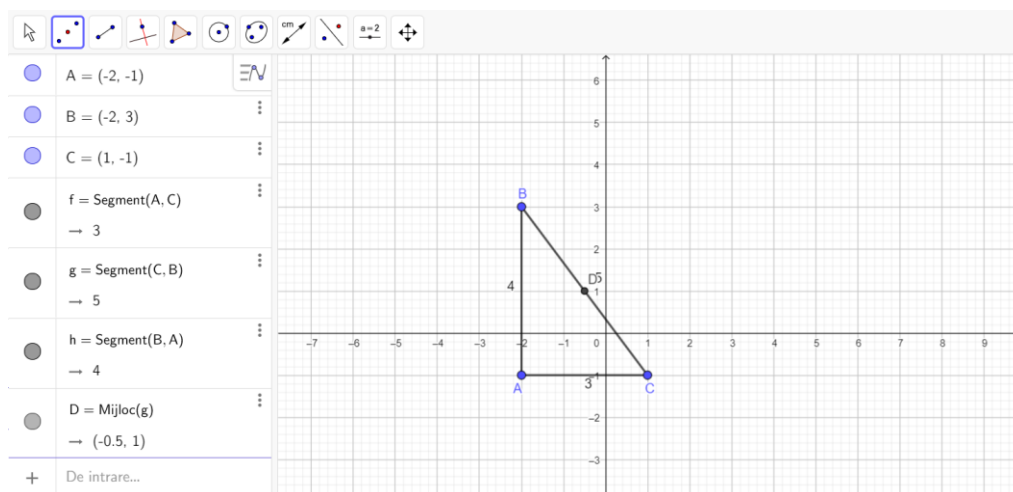
Aplicația: GeoGebra

Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele: $A(-2; -1)$, $B(-2; 3)$, $C(1, -1)$ apoi calculați lungimile segmentelor AB , AC , respectiv BC și construiți D , mijlocul segmentului BC .





Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Prezentare Algebrică* și *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

1.		Se introduc în bara de intrare, de la tastatură, punctele cu coordonatele corespunzătoare, apoi apăsați tasta <i>Enter</i> .
2.		Segment între două puncte Se construiesc segmentele determinate de punctele A , B și C .
3.		Distanță sau lungime Se determină lungimea segmentelor construite.
4.		Mijloc sau centru Se determină mijlocul segmentului BC , notat cu D .
5.		Salvare construcție

Aplicația: Quizizz



Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/61d45ba8a6e65c001dcfefb6>

Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice. Poligonul frecvențelor

Aplicația recomandată: LearningApps

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

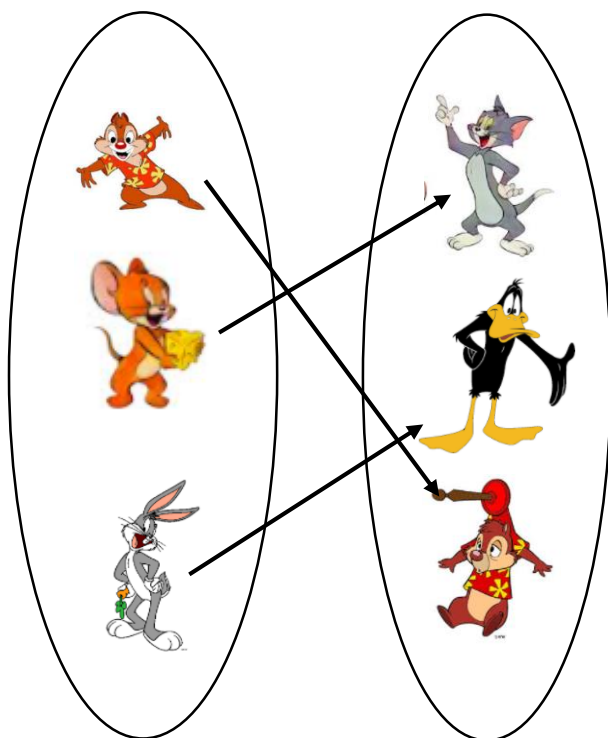
CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.3. Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor

CG 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

CS 6.3. Transpunerea unei situații date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)

Repere!



Fie A și B două mulțimi nevide. Spunem că există o **dependență funcțională** de la mulțimea A la mulțimea B , dacă oricărui element din mulțimea A i se asociază un unic element din mulțimea B .

În sensul definiției de mai sus, modul, regula, procedeul prin care fiecărui element $a \in A$ din mulțimea A i se asociază un unic element $b \in B$ se numește **lege de corespondență** sau relație funcțională de la mulțimea A la mulțimea B .

O dependență funcțională de la mulțimea A la mulțimea B se poate reprezenta printr-un tabel, printr-o diagramă sau printr-un grafic.



Pot să aplic!

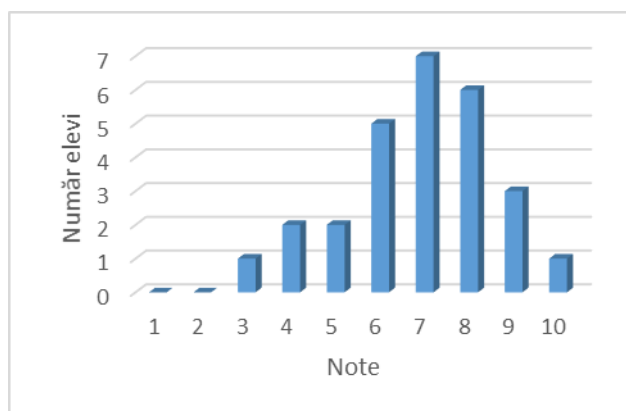


Nivel 1

1. Determinați înălțimea medie a grupului de elevi din tabelul de mai jos.

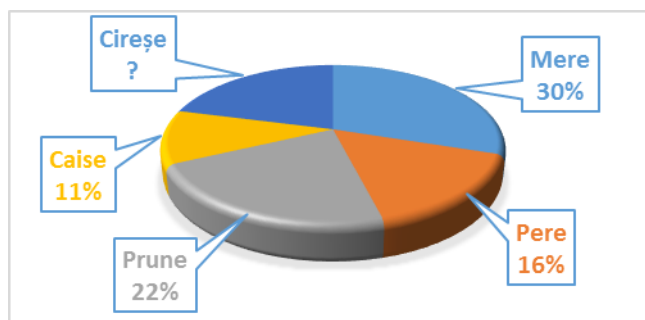
Nume elev	Ana	Cristi	Radu	Oana	Tudor	Anda	Gabi
Înălțime	1,52 m	1,60 m	1,50 m	1,55 m	1,65 m	1,45 m	1,66 m

2. Graficul de mai jos prezintă rezultatele clasei a VII-a, obținute la teza de matematică.



Câți elevi sunt în clasă?

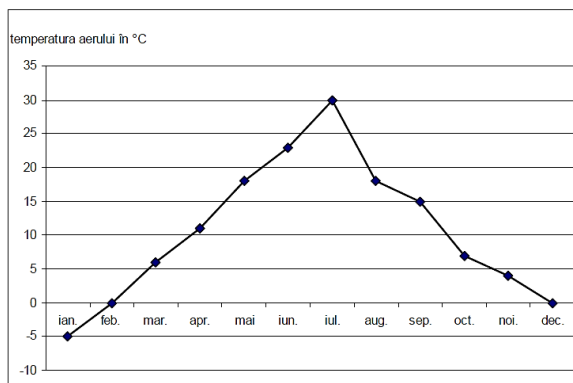
3. Recolta dintr-o livadă este reprezentată de diagrama de mai jos. Ce procent din totalul fructelor culese o reprezintă recolta de cireșe?



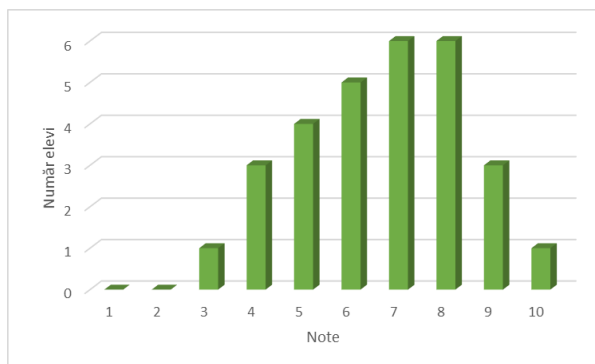


Nivel 2

- Utilizând datele reprezentate în graficul de mai jos determinați diferența dintre temperatura cea mai mare și cea mai mică.

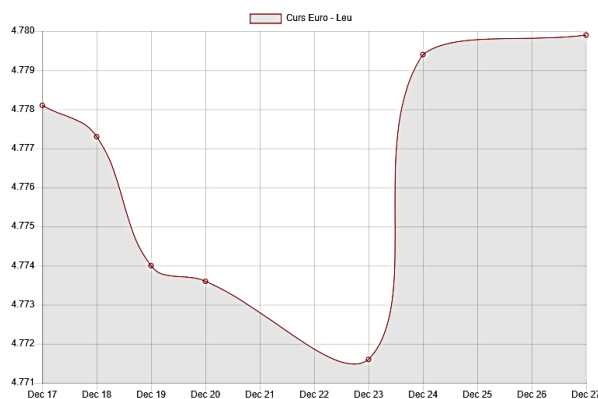


- Graficul de mai jos prezintă notele elevilor clasei a VII-a, obținute la biologie.



Câți elevi au avut nota mai mare decât 7?

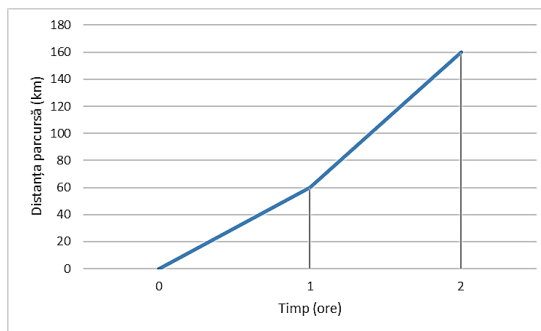
- Graficul de mai jos reprezintă cursul euro – leu în perioada 17.12.2019-27.12.2019. Cu cât s-a devalorizat leul în perioada 17.12.2019-19.12.2019?



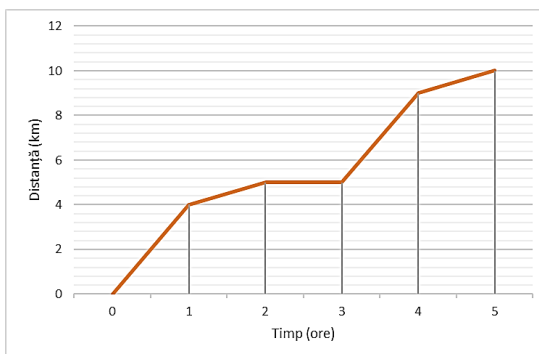


Nivel 3

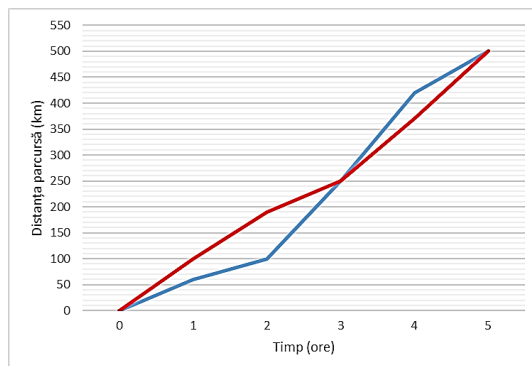
1. Un autoturism a parcurs distanța de 160 km în două ore conform graficului de mai jos. Care este viteza medie al autoturismului?



2. Un turist a parcurs o distanță de 10 km conform graficului de mai jos. Cât timp s-a odihnit turistul?



3. O mașină roșie și una albastră pleacă în același timp și din același loc parcurgând cei 500 de km până la destinație în 5 ore. Parcurgând traseul conform graficului de mai jos determinați cu câte ore înainte de a ajunge la destinație o va depăși mașina albastră pe cea roșie?



Aplicatii recomandate!

Aplicația: LearningApps

Link: <https://learningapps.org/view23092948>

[LearningApps.org](https://learningapps.org)

GEOMETRIE

Capitolul I. PATRULATERE

Patrulaterul convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex

Aplicații recomandate: GeoGebra, LearningApps

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.4. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.4. Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date

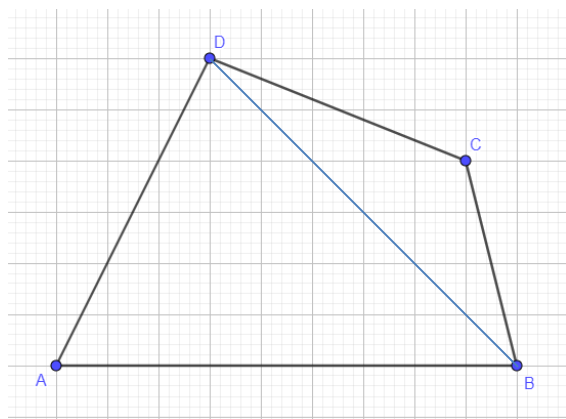
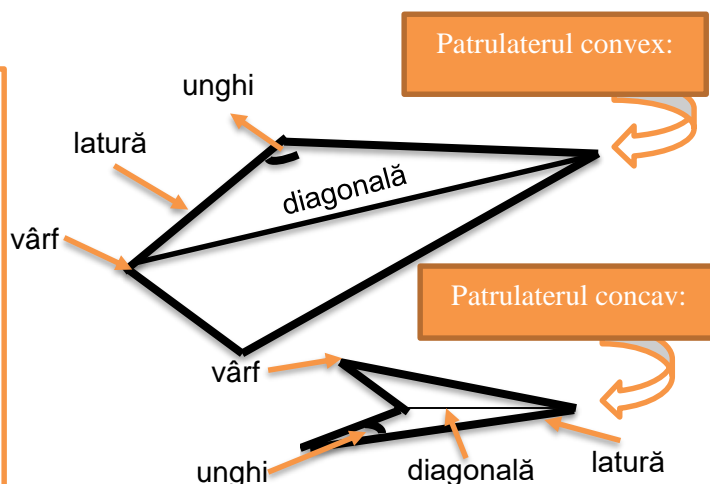
Repere!

Poligonul este o figură geometrică plană, închisă, formată dintr-un număr finit de linii drepte, numite laturi.

Patrulaterul este un poligon cu patru laturi.

Un patrulater se numește **convex** dacă toate vârfurile sale sunt situate în același semiplan determinat de orice dreaptă ce include o latură a poligonului.

Un patrulater se numește **concav** dacă există cel puțin două vârfuri situate de o parte și de alta a unei drepte ce include o latură a poligonului.



Suma măsurilor unghiurilor într-un patrulater convex este de 360° .

Justificare:

Cu ajutorul diagonalei BD obținem triunghiurile ABD și BCD . Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180° . Putem scrie:

$$\widehat{DAB} + \widehat{ABD} + \widehat{BDA} = 180^\circ \text{ și } \widehat{DCB} + \widehat{CBD} + \widehat{BDC} = 180^\circ.$$

Adunând cele două relații, obținem:

$$\widehat{DAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} = 360^\circ.$$

Pot să aplic!



Nivel 1

Triunghiul ABC isoscel are $\hat{A} = 36^\circ$ și $[AB] \equiv [AC]$. Știind că BD este bisectoarea \widehat{ABC} , $D \in (AC)$ și E este mijlocul laturii AB , măsura unghiului \widehat{CDE} este de



Nivel 2

În patrulaterul convex $ABCD$, $\widehat{BAD} = 110^\circ$, $\widehat{ABC} = 110^\circ$, $\widehat{ABD} = 41^\circ$ și $\widehat{BDC} = 56^\circ$. Măsura unghiului \hat{C} este egală cu



Nivel 3

În patrulaterul convex $MNQP$ avem două perechi de laturi consecutive congruente: $[MN] \equiv [NP]$ și $[PQ] \equiv [QM]$. Atunci:

a) $PN \parallel MQ$	b) $MP \cap NQ = \emptyset$	c) $MN \parallel PQ$	d) $MP \perp NQ$
-------------------------	--------------------------------	-------------------------	---------------------

Aplicații recomandate!

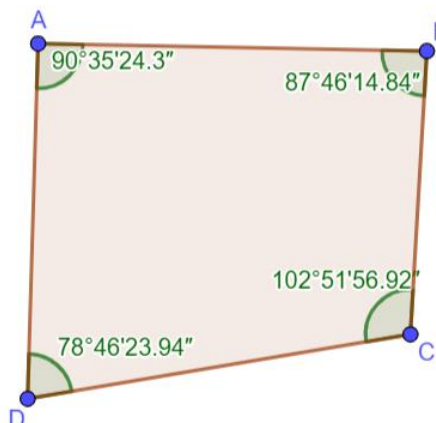
Aplicația: **GeoGebra**







Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

1.		Punct Se construiesc punctele A, B, C și D necoliniare.
2.		Poligon Se constriște un poligon cu patru laturi.
3.		Unghi Se măsoară unghiurile patrulaterului și se verifică suma lor.
4.		Salvare construcție

Aplicația: **LearningApps**

[LearningApps.org](https://learningapps.org)

Link: <https://learningapps.org/view21106791>

Paralelogramul; proprietăți

Aplicații recomandate: GeoGebra, Pythagorea, LearningApps

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.4. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

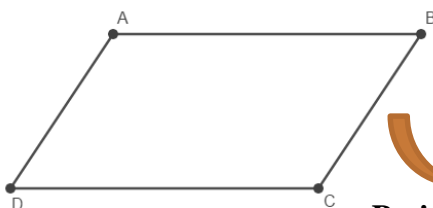
CS 2.4. Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.4. Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme

Repere!

Definiție: Paralelogramul este patrulaterul convex care are laturile opuse paralele.



ABCD – paralelogram

Laturi opuse: $AB \text{ și } CD \Rightarrow AB \parallel CD$

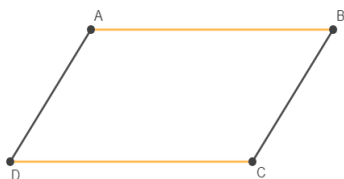
$AD \text{ și } BC \Rightarrow AD \parallel BC$

Perimetrul unui paralelogram este egal cu suma lungimilor laturilor sale: $P = AB + BC + CD + AD$.



Proprietatea 1.

În orice paralelogram, laturile opuse sunt congruente (egale) două câte două: $AB = CD$ și $AD = BC$.

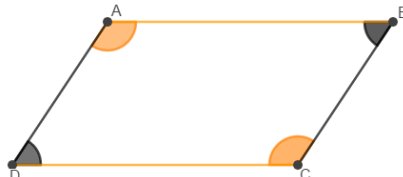


Proprietatea 2.

În orice paralelogram, unghiurile opuse sunt congruente, iar unghiurile alăturate sunt suplementare:

$$\hat{A} \equiv \hat{C} \text{ și } \hat{B} \equiv \hat{D}$$

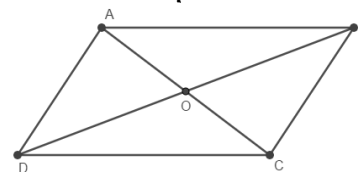
$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \text{ și } \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ etc.}$$



Proprietatea 3.

În orice paralelogram, diagonalele se înjumătățesc:

$$AO \equiv OC \text{ și } BO \equiv OD$$



Cum demonstrăm că un patrulater este PARALELOGRAM?

Dacă într-un patrulater convex laturile opuse sunt congruente două câte două, atunci patrulaterul este paralelogram.

Dacă într-un patrulater convex două laturi opuse sunt paralele și congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

Dacă într-un patrulater convex unghiurile opuse sunt congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

Dacă într-un patrulater convex diagonalele se înjumătățesc (au același mijloc), atunci patrulaterul este paralelogram.

Pot să aplic!



Nivel 1

În patrulaterul convex $ABCD$ se notează cu M mijlocul lui AD , cu N mijlocul lui BC , cu P mijlocul lui BD și cu Q mijlocul lui AC . Știind că $AB = 19$ cm și $CD = 17$ cm, perimetrul patrulaterului $MPNQ$ este egal cu ... cm.



Nivel 2

În triunghiul ABC , B' este simetricul lui B față de mijlocul laturii AC , C' este simetricul lui C față de mijlocul laturii AB , atunci ...

C', A și B' sunt coliniare	$\widehat{B'AC'} = 190^\circ$	$\widehat{B'AC'} = 170^\circ$	$\widehat{B'AC'} = 120^\circ$
--------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------



Nivel 3

Se consideră patrulaterul convex $ABCD$, M mijlocul laturii AB și N mijlocul laturii CD . Se construiesc paralelogramele $ADEM$ și $MBCF$. În triunghiul MEF , MN este

Aplicații recomandate!

Aplicația: **GeoGebra**



Construcția paralelogramului








Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem **Meniul**, selectăm **Vizualizare**, apoi **Bloc Desen**.

Figură:



Pași:

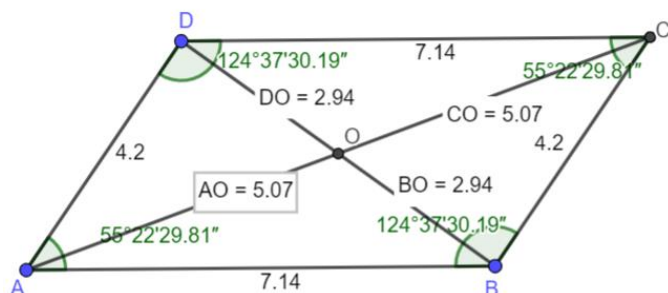
1.		Segment Se construiește un segment AB de lungime dorită. Se construiește un segment AD de lungime dorită.
2.		Paralelă Prin punctul B se construiește o paralelă la AD . Prin punctul D se construiește o paralelă la AB .
3.		Intersecție două obiecte Punctul de intersecție a celor două paralele se notează cu C .
4.		Segment Se construiesc segmentele BC , respectiv CD .
5.		Poligon Se constrieste un poligon cu patru laturi.
6.		Arată/Ascunde obiecte Se ascund cele două drepte paralele pentru a rămâne evidențiat paralelogramul.
7.		Salvare construcție.

Proprietățile paralelogramului

Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem **Meniul**, selectăm **Vizualizare**, apoi **Bloc Desen**.
- ✓ Construim paralelogramul urmând pașii de mai sus

Figură:



Pași:

1.		Segment Se construiește segmentul AC . Se construiește segmentul BD .
2.		Intersecție două obiecte Se construiește punctul de intersecție a celor două diagonale AC , respectiv BD și se notează cu O .
3.		Distanță sau lungime Se măsoară lungimea segmentelor $AB, BC, CD, DA, AO, BO, CO$, respectiv DO și se arată următoarele egalități: $AB = CD, AD = BC, AO = CO, BO = DO$.
4.		Unghi Se măsoară cele patru unghiuri ale paralelogramului și se arată egalitatea unghiurilor opuse și faptul că oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare.
5.		Salvare construcție.

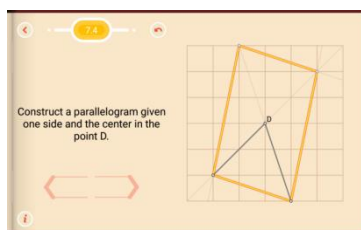
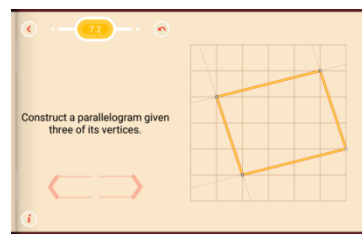
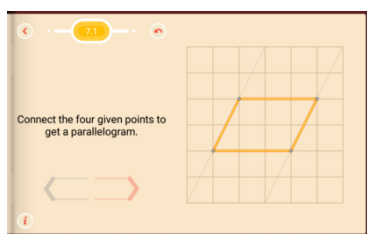
Aplicația: [Pythagorea](#)



Reguli:

Se accesează aplicația **Pythagorea** și se selectează:

➤ „Parallelograms” = Paralelograme



Aplicația: LearningApps

LearningApps.org

Link: <https://learningapps.org/view21107131>

Aplicații în geometria triunghiului: linia mijlocie în triunghi

Aplicația recomandată: GeoGebra

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.4. Identificarea patrulelor particulare în configurații geometrice date

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

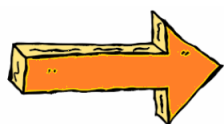
CS 2.4. Descrierea patrulelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.4. Utilizarea proprietăților patrulelor în rezolvarea unor probleme

Repere!

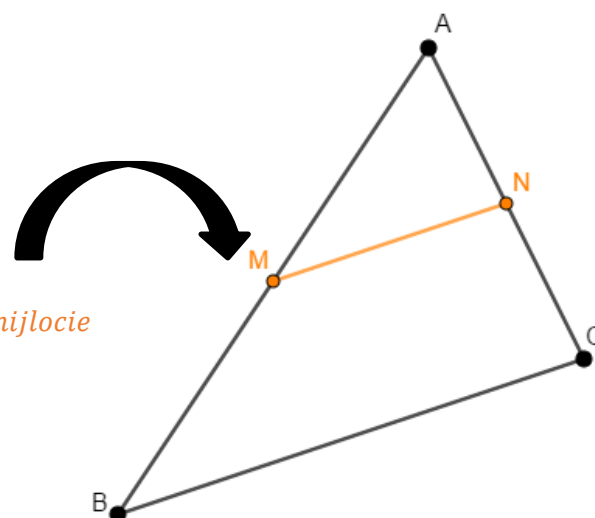
Definiție: Se numește **linie mijlocie** într-un triunghi segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi.



$\triangle ABC$,

M – mijlocul lui AB

N – mijlocul lui AC $\Rightarrow MN$ – linie mijlocie



Proprietatea liniei mijlocii:

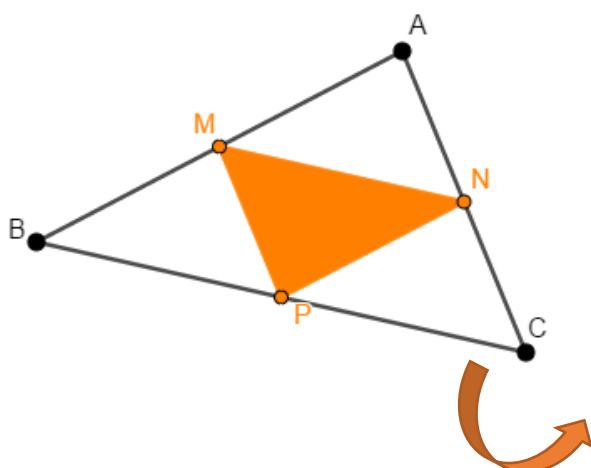
Într-un triunghi, o linie mijlocie este paralelă cu a treia latură și are lungimea egală cu jumătate din lungimea acestei laturi.

În cazul nostru, $MN \parallel BC$ și $MN = \frac{BC}{2}$.

Reciproca proprietății liniei mijlocii:

În orice triunghi, paralela prin mijlocul unei laturi la una dintre laturi trece prin mijlocul celeilalte laturi.

În cazul nostru, M – mijlocul lui AB
 $MN \parallel BC \Rightarrow N$ – mijlocul lui AC



Un triunghi are trei linii mijlocii. Triunghiul determinat de liniile mijlocii se numește **triunghiul median**.

$\triangle ABC$, MN – linie mijlocie
 NP – linie mijlocie $\Rightarrow \triangle MNP$ – triunghi median
 MP – linie mijlocie

Pot să aplic!



Nivel 1

În triunghiul ABC se consideră M mijlocul laturii AB , N mijlocul laturii AC și P mijlocul laturii BC . Știind că $AB = 10$ cm, $AC = 8$ cm și $BC = 12$ cm, perimetrul triunghiului MNP este egal cu ... cm.



Nivel 2

Dacă M și N sunt mijloacele laturilor AB și AC ale unui triunghi ABC și D un punct oarecare pe latura BC , E mijlocul segmentului AD este ...

identic cu N	identic cu M	pe BC	pe MN
----------------	----------------	---------	---------



Nivel 3

Fie semidreapta AD bisectoarea unghiului \widehat{BAC} al triunghiului ABC . Paralela prin B la bisectoarea AD , $D \in BC$, intersectează latura AC în E . Dacă N este mijlocul laturii BC , $AB = 10$ cm, $AC = 20$ cm și $AM \perp BE$, $M \in BE$, atunci lungimea segmentului MN este ... cm.

Aplicații recomandate!

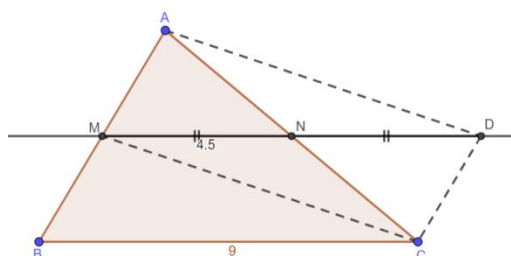
Aplicația: GeoGebra



Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

1.		Poligon Se construiește un poligon cu trei laturi (triunghi ABC).
2.		Mijloc sau centru Se construiesc punctele M și N , mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$.
3.		Reflectare după un punct Se construiește D , simetricul punctului M față de N .
4.		Segment Se construiesc segmentele AD , DC , CM , respectiv MD .
5.		Distanță sau lungime Se măsoară lungimea lui MN , respectiv BC .
6.		Paralelă Se construiește paralela prin M la BC și se observă că trece prin N și D .
7.		Salvare construcție.

Aplicații în geometria triunghiului: centrul de greutate al unui triunghi

Aplicații recomandate: GeoGebra, LearningApps

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.4. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.4. Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.4. Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme

Repere!

Definiție: Numim **centrul de greutate** al unui triunghi punctul de intersecție al medianelor acelui triunghi.

Notatie: **G**



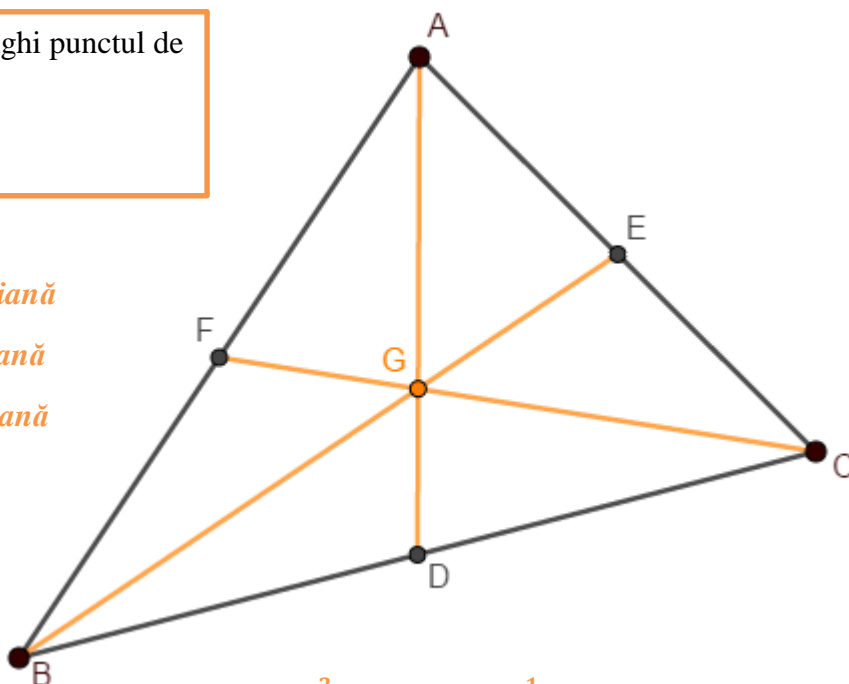
ABC – triunghi oarecare

D – mijlocul lui $BC \Rightarrow AD$ – mediană

E – mijlocul lui $AC \Rightarrow BE$ – mediană

F – mijlocul lui $AB \Rightarrow CF$ – mediană

$\Rightarrow AD \cap BE \cap CF = \{G\}$



Teoremă: În orice triunghi, centrul de greutate se află, pe oricare mediană, la două treimi de vârf și o treime de latură.

$$AG = \frac{2}{3} \cdot AD \text{ și } GD = \frac{1}{3} \cdot AD$$

$$BG = \frac{2}{3} \cdot BE \text{ și } GE = \frac{1}{3} \cdot BE$$

$$CG = \frac{2}{3} \cdot CF \text{ și } GF = \frac{1}{3} \cdot CF$$

Pot să aplic!



Nivel 1

Fie ABC un triunghi oarecare și G centrul lui de greutate. Stabiliți dacă $AG = 2 \cdot GD$, unde D este mijlocul laturii BC .



Nivel 2

În triunghiul dreptunghic ABC , $\hat{A} = 90^\circ$ și $BC = 18 \text{ cm}$. Care este distanța de la punctul A la centrul de greutate al triunghiului ABC ?



Nivel 3

În triunghiul ABC se consideră A', B', C' mijloacele segmentelor AH, BH , respectiv CH , unde H este ortocentrul triunghiului, iar A_1, B_1, C_1 punctele diametral opuse vârfurilor A, B , respectiv C în cercul circumscris triunghiului ABC . Atunci dreptele A_1A', B_1B', C_1C' trec prin punctul ... al triunghiului ABC .

Aplicații recomandate!

Aplicația: **GeoGebra**

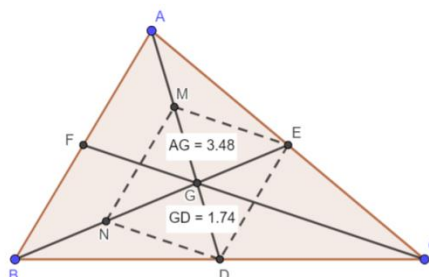


Medianele într-un triunghi

Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

1.		Poligon Se construiește un poligon cu trei laturi (triunghi ABC)
2.		Mijloc sau centru Se construiesc punctele D , E și F , mijloacele laturilor BC , AC , respectiv AB
3.		Segment Se construiesc segmentele AD , BE , respectiv CF
4.		Intersecție a două obiecte Se construiește intersecția a două mediane și se notează cu G . Se observă că cea de a treia mediană trece prin G
5.		Mijloc sau centru Se construiesc punctele M și N , mijloacele segmentelor AG , respectiv BG
6.		Segment Se construiesc segmentele MN , ND , DE respectiv EM Se observă că MN , ND , DE , respectiv EM sunt linii mijlocii și de aici se deduce faptul că $MNDE$ este paralelogram
7.		Distanță sau lungime Se măsoară și se compară lungimea lui $[AG]$, respectiv $[GD]$, sau lungimea lui $[BG]$, respectiv $[GE]$, sau lungimea lui $[CG]$, respectiv $[GF]$
8.		Salvare construcție.

Aplicația: **LearningApps**

[LearningApps.org](https://learningapps.org)

Link: <https://learningapps.org/view21272303>

Paralelorame particulare: dreptunghiul

Aplicații recomandate: GeoGebra, Pythagorea, LearningApps

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.4. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.4. Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.4. Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulatere

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

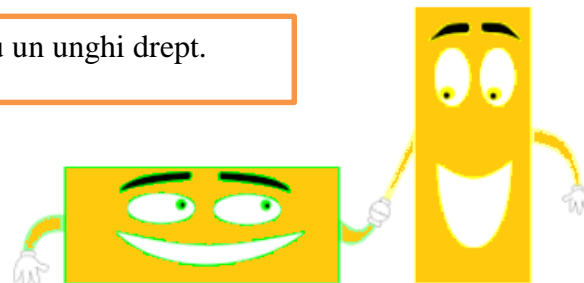
CS 5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii

Repere!

Definiție: **Dreptunghiul** este paralelogramul cu un unghi drept.



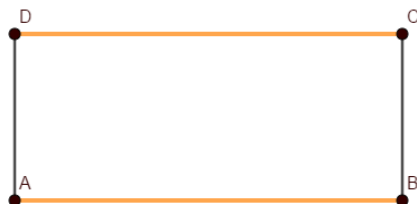
Dreptunghiul este un paralelogram particular (așadar preia toate proprietățile paralelogramului, dar particularizate).



Proprietatea 1.

În orice dreptunghi, laturile opuse sunt paralele și congruente (egale) două câte două:

$AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$;
 $AB = CD$ și $AD = BC$.



Proprietatea 2.

În orice dreptunghi, toate unghiurile sunt congruente și drepte:

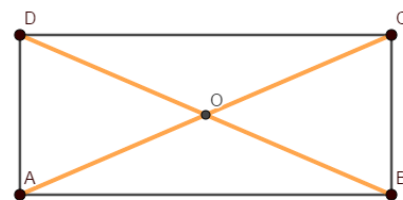
$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$$

Proprietatea 3.

În orice dreptunghi, diagonalele sunt congruente și se înjumătățesc.

$ABCD$ - dreptunghi
 $AC = BD$

$$AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow \\ \Rightarrow AO = BO = CO = DO$$



Cum demonstrăm că un patrulater este DREPTUNGHI?

Mai întâi vom demonstra că patrulaterul respectiv este un paralelogram!

- Dacă un paralelogram are un unghi drept, atunci paralelogramul este DREPTUNGHI.
- Dacă într-un paralelogram diagonalele sunt congruente, atunci paralelogramul este DREPTUNGHI.

Perimetrul unui dreptunghi este egal cu suma lungimilor laturilor sale. $P = 2 \cdot (L + l)$.

Pot să aplic!



Nivel 1

Fie dreptunghiul $MNPQ$, cu $MP \cap NQ = \{O\}$. Dacă $\widehat{MON} = 120^\circ$ și $ON = 24$ cm, atunci perimetrul triunghiului MOQ este egal cu



Nivel 2

Se consideră dreptunghiul $ABCD$ în exteriorul căruia se construiesc triunghiurile echilaterale ABM și BCN . Măsura unghiului \widehat{MDN} este egală cu ... $^\circ$.



Nivel 3

Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel de catetă 4 cm și M un punct oarecare pe ipotenuza BC . Dacă $MN \perp AB, N \in AB$ și $MP \perp AC, P \in AC$, atunci $MN + MP$ este egal cu

Aplicații recomandate!

Aplicația: [GeoGebra](#)

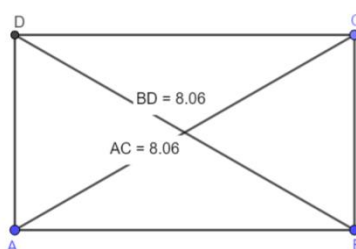


Dreptunghiul: construcție, proprietăți










Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

1.		Segment Se construiește segmentul AB .
2.		Perpendiculară Se construiesc perpendicularele în A și B pe AB .
3.		Punct Se alege un punct C pe perpendiculara în B pe AB .
4.		Perpendiculară Se construiește perpendiculara în C pe BC .
5.		Intersecție Se fixează punctul de intersecție între perpendiculara în A pe AB , respectiv în C pe BC și se notează cu D .
6.		Arată/Ascunde obiecte Se ascund cele trei drepte perpendiculare.
7.		Segment Se construiesc segmentele BC , CD , respectiv DA pentru a evidenția dreptunghiul. Se construiesc segmentele AC și BD .
8.		Distanță sau lungime Se măsoară și se compară lungimea lui AC , respectiv BD .
9.		Salvare construcție.

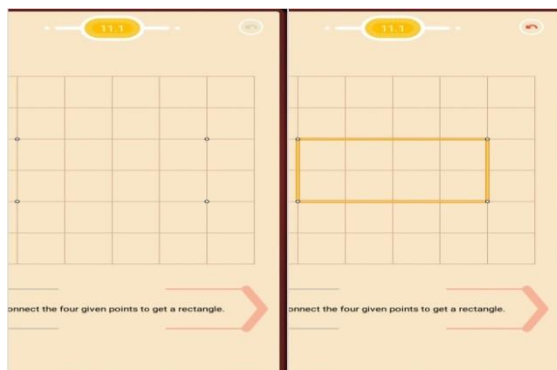
Aplicația: Pythagorea

Reguli:



Se accesează aplicația **Pythagorea** și se selectează:

- „Rectangles” = Dreptunghiuri



Aplicația: LearningApps

[LearningApps.org](https://learningapps.org)

Link: <https://learningapps.org/view21124744>

Paralelorame particulare: rombul

Aplicații recomandate: GeoGebra, Pythagorea, LearningApps

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.4. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.4. Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.4. Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.4. Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulatere

Repere!



Definiție: **Rombul** este paralelogramul cu două laturi consecutive congruente.

- Rombul este un paralelogram particular (așadar preia toate proprietățile paralelogramului, dar particularizate).

Proprietatea 1.

Rombul are laturile opuse paralele două câte două:

$$AB \parallel CD \text{ și } AD \parallel BC$$

Proprietatea 2.

Rombul are toate laturile congruente:

$$AB \equiv BC \equiv CD \equiv AD$$

Proprietatea 3.

Unghiurile opuse ale rombului sunt congruente și oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare:

$$\hat{A} \equiv \hat{C} \text{ și } \hat{B} \equiv \hat{D}$$

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ, \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ etc.}$$

Proprietatea 4.

Diagonalele rombului se înjumătățesc:

$$AO \equiv OC \text{ și } BO \equiv OD$$

Proprietatea 5.

Diagonalele rombului sunt perpendiculare:

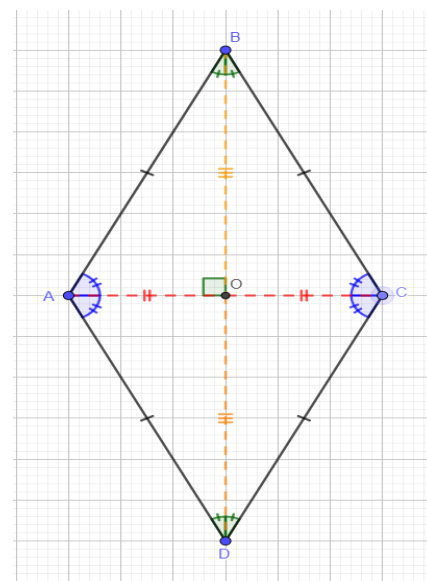
$$AC \perp BD$$

Proprietatea 6.

Diagonalele rombului sunt bisectoarele unghiurilor:

AC – bisectoarea \widehat{BAD} și \widehat{BCD}

BD – bisectoarea \widehat{ABC} și \widehat{ADC}



Cum demonstrăm că un patrulater este ROMB?

- este paralelogram și are două laturi consecutive congruente;
- este paralelogram cu diagonalele perpendiculare;
- este paralelogram în care una din diagonale este și bisectoare.

Pot să aplic!



Nivel 1

Într-un romb $ABCD$, măsura unghiului $\widehat{ADB} = 60^\circ$ și $BD = 12$ cm. Perimetrul rombului $ABCD$ este egal cu ... cm.



Nivel 2

Se consideră triunghiul dreptunghic ABC , $\hat{A} = 90^\circ$ și $BC = 10$ cm. Știind că D este simetricul lui B față de A și E este simetricul lui C față de A , perimetrul patrulaterului $BCDE$ este egal cu ... cm.



Nivel 3

Se consideră romb $ABCD$ cu E și F mijloacele laturilor AB , respectiv BC . Dacă P este un punct astfel încât $PE \equiv CE$ și $AF \equiv PF$, atunci ...

Aplicații recomandate!

Aplicația: [GeoGebra](#)

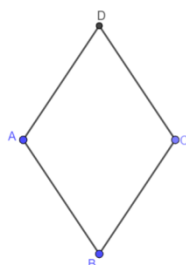


Rombul: construcție








Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier *GeoGebra*;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

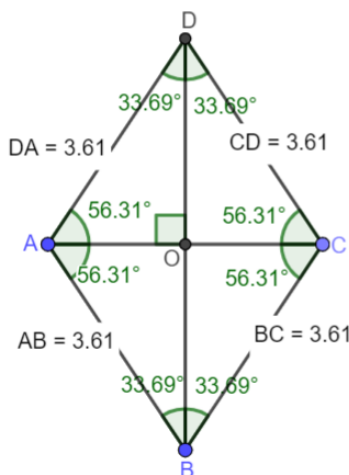
1.		Segment Se construiește segmentul AB
2.		Segment de lungime dată Se construiește segmentul BC de lungime AB
3.		Paralelă Prin punctul A se construiește o paralelă la BC . Prin punctul C se construiește o paralelă la AB .
4.		Intersecție două obiecte Punctul de intersecție a celor două paralele se notează cu D .
5.		Segment Se construiesc segmentele AD , respectiv CD .
6.		Arată/Ascunde obiecte Se ascund cele două drepte parale pentru a rămâne evidențiat rombul.
7.		Salvare construcție.

Rombul: proprietăți






Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier *GeoGebra*;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.
- ✓ Construim un romb urmând pașii de mai sus

Figură:



Pași:

1.		Segment Se construiește segmentul AC Se construiește segmentul BD
2.		Intersecție două obiecte Se construiește punctul de intersecție a celor două diagonale AC , respectiv BD și se notează cu O
3.		Distanță sau lungime Se măsoară lungimiile segmentelor AB , BC , CD , DA , AO , BO , CO , respectiv DO și se arată următoarele egalități: $AB = BC = CD = DA$
4.		Unghi Se măsoară unghiurile ADO , CDO , DAO , BAO , ABO , CBD , BCO , respectiv DCO și se arată că diagonalele AC și BD sunt bisectoarele unghiurilor rombului Se măsoară unghiul AOD și se arată că diagonalele AC și BD sunt perpendiculare
5.		Salvare construcție.

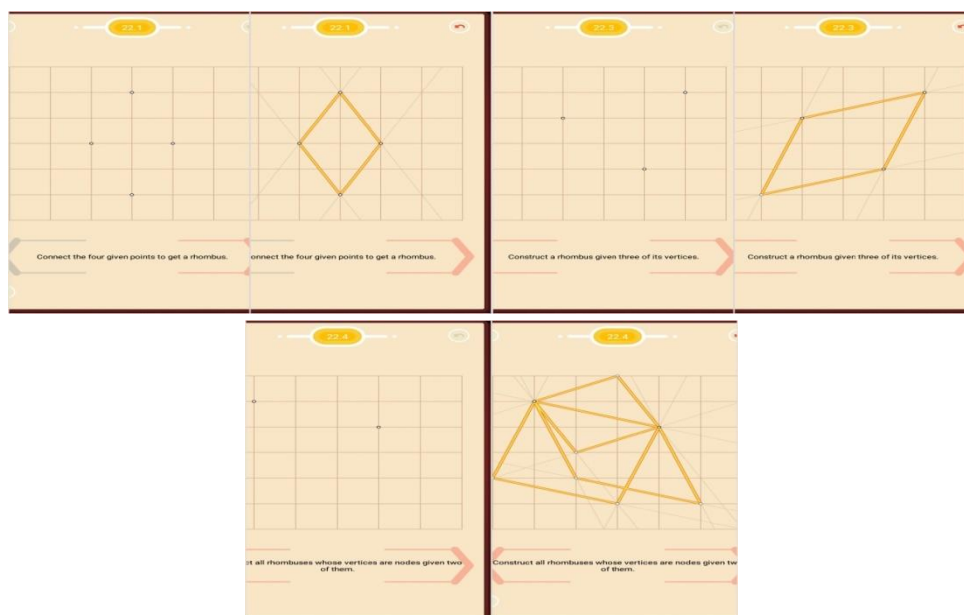
Aplicația: [Pythagorea](#)

Reguli:



Se accesează aplicația **Pythagorea** și se selectează:

- „Rhombuses” = Romburi



Aplicația: [LearningApps](https://learningapps.org/view21272430)

Link: <https://learningapps.org/view21272430>

[LearningApps.org](https://learningapps.org)

Paralelorame particulare: pătratul

Aplicații recomandate: GeoGebra, Pythagorea, Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.4. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.4. Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date

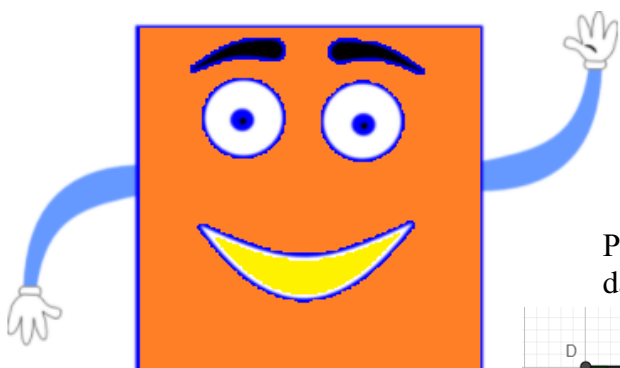
CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.4. Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme

CG 4. Explicarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.4. Explicarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulatere

Repere!



Definiție: **Pătratul** este rombul cu un unghi drept.

Perimetrul unui pătrat este egal cu suma lungimilor laturilor sale.

Notăm *latura* = $l \Rightarrow P_{\square} = 4 \cdot l$.

Pătratul este un romb particular (așadar preia toate proprietățile rombului, dar particularizate).

Proprietatea 3.

În orice pătrat, diagonalele sunt:

a) congruente: $AC \equiv BD$;

b) perpendiculare: $AC \perp BD$;

c) se înjumătățesc:

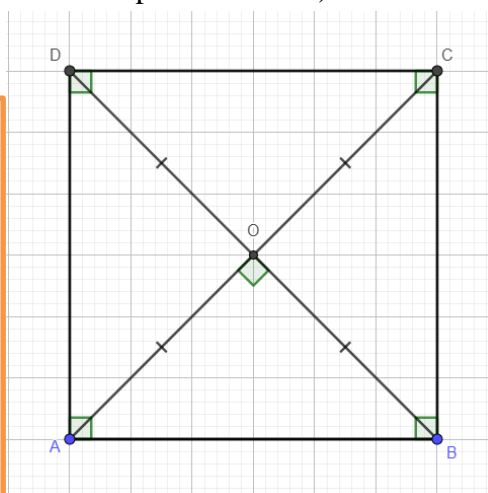
$$AO \equiv CO \equiv BO \equiv DO;$$

d) sunt bisectoare pentru unghiuri:

AC – bisectoarea \widehat{BAD} și \widehat{BCD}

BD – bisectoarea \widehat{ABC} și \widehat{ADC}

e) sunt axe de simetrie.



Proprietatea 1.

În orice pătrat, toate laturile sunt congruente, iar laturile opuse sunt paralele:

$$AB = BC = CD = AD$$

$$AB \parallel CD \text{ și } AD \parallel BC$$

Proprietatea 2.

Orice pătrat are toate unghiurile congruente și drepte:

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$$

Proprietatea 4.

Orice pătrat are un centru de simetrie (O - punctul de intersecție al diagonalelor) și patru axe de simetrie (AC și BD diagonale și mediatoarele laturilor).

Pot să aplic!



Nivel 1

Fie $ABCD$ un pătrat. În exteriorul pătratului se construiește triunghiul echilateral ADM . Măsura unghiului \widehat{CMD} este egală cu ... $^{\circ}$.



Nivel 2

Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și semidreapta BM bisectoarea \widehat{ABC} , $M \in DC$. Știind că $CN \perp BM$, $N \in AB$ și dacă $BC = 4,5$ cm, perimetrul patrulaterului $BCMN$ este ... cm.



Nivel 3

Pe laturile AB și BC ale triunghiului echilateral ABC se construiesc în exterior pătratele $ABMN$ și $BCPQ$. Dacă $AQ \cap MC = \{E\}$ și $F \in AC$ astfel încât $AF \equiv FC$, atunci măsura unghiului \widehat{BEF} este egală cu ... $^{\circ}$.

Aplicatii recomandate!

Aplicația: GeoGebra

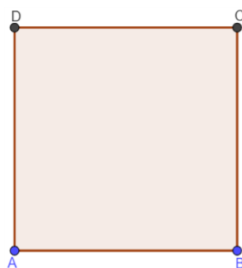


Pătratul: construcție



Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

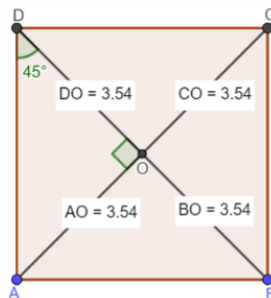
1.		Poligon regulat Se construiește un poligon regulat cu 4 laturi.
2.		Salvare construcție

Pătratul: proprietăți







Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.
- ✓ Se construiește un pătrat urmând pașii de mai sus

Figură:



Pași: Se verifică faptul că pătratul are toate proprietățile rombului și toate proprietățile dreptunghiului

1.		Poligon regulat Se construiește un poligon regulat cu 4 laturi.
2.		Segment Se construiesc segmentele AC și BD .
3.		Intersecție două obiecte Se construiește punctul de intersecție a celor două diagonale AC , respectiv BD și se notează cu O .
4.		Distanță sau lungime Se măsoară lungimiile segmentelor AB , BC , CD , DA , AC , respectiv BD și se arată următoarele egalități: $AB = BC = CD = DA$, respectiv $AC = BD$.
5.		Unghi Se măsoară unghiurile ABC , BCD , CDA , respectiv DAB și se arată că toate unghiurile sunt drepte. Se măsoară unghiurile ADO , CDO , DAO , BAO , ABO , CBD , BCO , respectiv DCO și se arată că diagonalele AC și BD sunt bisectoarele unghiurilor pătratului. Se măsoară unghiul AOD și se arată că diagonalele AC și BD sunt perpendiculare.
6.		Salvare construcție.

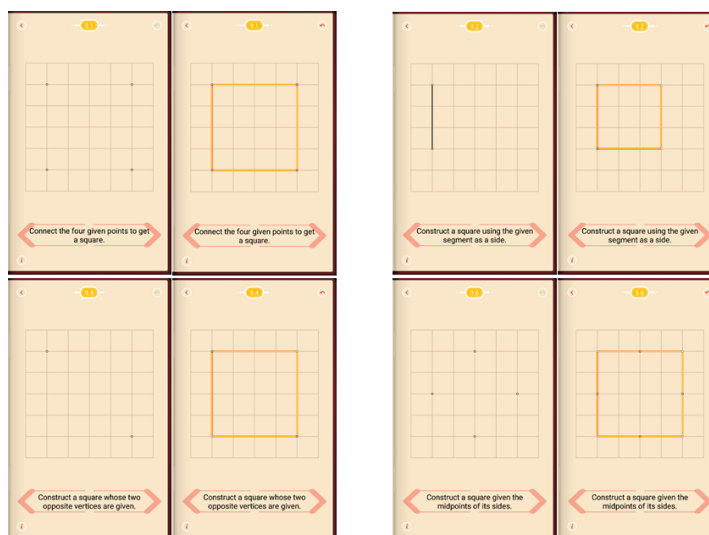
Aplicația: **Pythagorea**



Reguli:

Se accesează aplicația **Pythagorea** și se selectează:

➤ „Squares” = Pătrat



Aplicația: **Quizizz**



Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/6145bbbc55f59d001de3e693>

Trapezul: clasificare, proprietăți

Aplicații recomandate: GeoGebra, Pythagorea, LearningApps

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.4. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.4. Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.4. Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme

CG 4. Explicarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.4. Explicarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulatere

Repere!

Definiție: **Trapezul** este patrulaterul convex cu două laturi paralele și două laturi neparalele.

Cele două laturi paralele ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) se numesc baze:
 AB - baza mare și CD - baza mică.

Proprietate: În orice trapez unghiurile alăturate fiecăreia dintre laturile neparalele sunt suplementare.

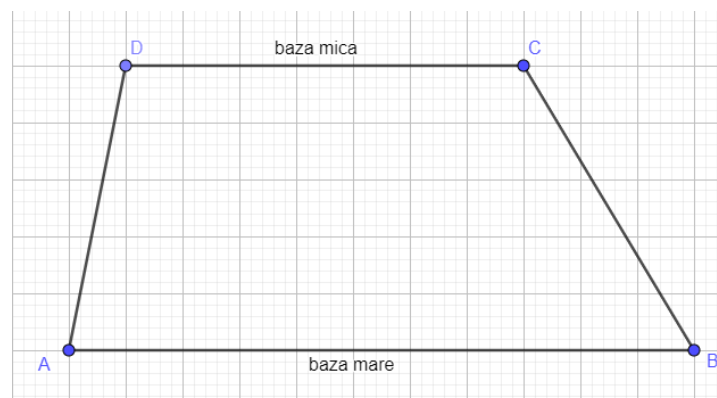
$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \text{ și } \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

Definiție: Trapezul cu laturile neparalele congruente se numește **trapez isoscel**: $AD \equiv BC$.

Proprietatea 1: În orice trapez isoscel, unghiurile alăturate aceleiași baze sunt congruente: $\hat{A} \equiv \hat{B}$ și $\hat{C} \equiv \hat{D}$.

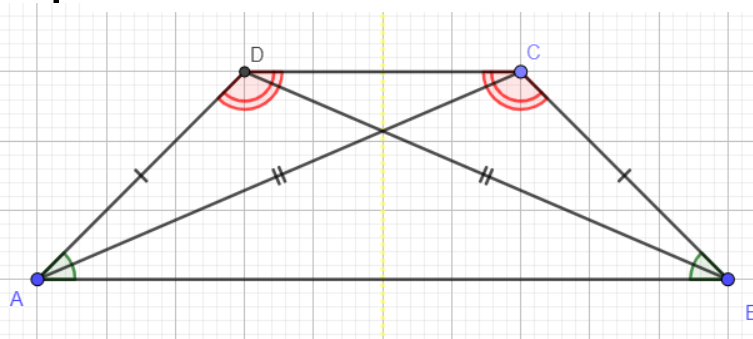
Proprietatea 2: În orice trapez isoscel, diagonalele sunt congruente: $AC \equiv BD$.

Proprietatea 3: Orice trapez isoscel are o axă de simetrie - mediatoarea bazelor.

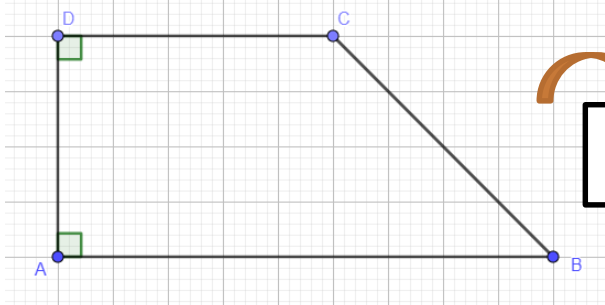


Perimetrul unui trapez este egal cu suma lungimilor tuturor laturilor:

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$$



Definiție: Trapezul care are un unghi drept se numește **trapez dreptunghic**: $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$.



Pot să aplic!



Nivel 1

Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB < CD$, $AB = AD = BC = 6$ cm. Dacă măsura unghiului $\widehat{ABC} = 120^\circ$, atunci latura DC are lungimea ...cm.



Nivel 2

Se dă trapezul $ABCD$ cu $AD \parallel BC$, $AB \equiv DC$, $BC > AD$. Știind că $AD = 6$ cm, $BC = 10$ cm și $\widehat{BAD} = 120^\circ$, perimetrul trapezului $ABCD$ este ... cm.



Nivel 3

În trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$, AC este bisectoarea unghiului \widehat{DAB} . Se duce $DM \perp AC$ și se notează cu P și N simetricele lui M față de BC și, respectiv, AB . Punctele N , B și P sunt

Aplicații recomandate!

Aplicația: [GeoGebra](#)

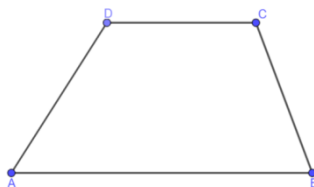


Trapezul: construcție








Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

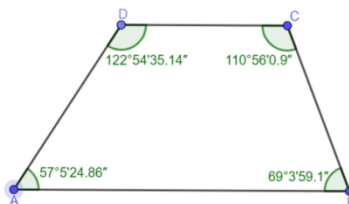
1.		Segment Se construiește segmentul AB .
2.		Punct Se fixează un punct C care să nu aparțină dreptei AB .
3.		Paralelă Prin punctul C se construiește o paralelă la AB .
4.		Punct Pe paralela construită se alege un punct D de aceeași parte a dreptei BC cu punctul A .
5.		Segment Se construiesc segmentele AD , DC respectiv CB .
6.		Arată/Ascunde obiecte Se ascunde paralela care trece prin C și D pentru a rămâne evidențiat trapezul.
7.		Salvare construcție.

Trapezul: proprietăți



Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.
- ✓ Se construiește un trapez urmând pașii de mai sus

Figură:



Pași:

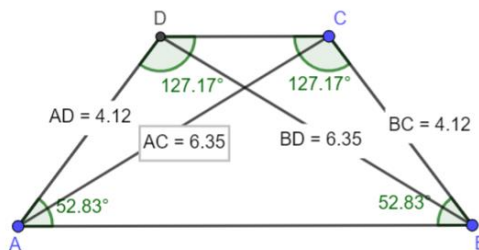
1.		Unghi Se măsoară unghiurile trapezului și se verifică faptul că unghiurile A și D , respectiv B și C sunt suplementare.
2.		Salvare construcție

Trapezul isoscel: construcție, proprietăți







Pregătiri:





- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

1.		Segment Se construiește segmentul AB .
2.		Punct Se fixează un punct C care să nu aparțină dreptei AB .
3.		Paralelă Prin punctul C se construiește o paralelă la AB .
4.		Cerc cu centru și rază Se construiește cercul cu centrul în A și rază BC .
5.		Intersecție Se fixează punctele de intersecție între paralela construită și cerc și se redenumesc punctul mai apropiat de C din E în D .
6.		Segment Se construiesc segmentele AD, DC, CB, AC , respectiv BD .

7.		Arată/Ascunde obiecte Se ascund paralela care trece prin C și D , cercul construit și celălalt punct de intersecție, pentru a rămâne evidențiat trapezul.
8.		Unghi Se măsoară unghiurile trapezului și se verifică faptul că măsurile unghiurilor alăturate unei baze sunt egale.
9.		Distanță sau lungime Se măsoară diagonalele AC , respectiv BD și se verifică egalitatea lungimilor lor.
10.		Salvare construcție.

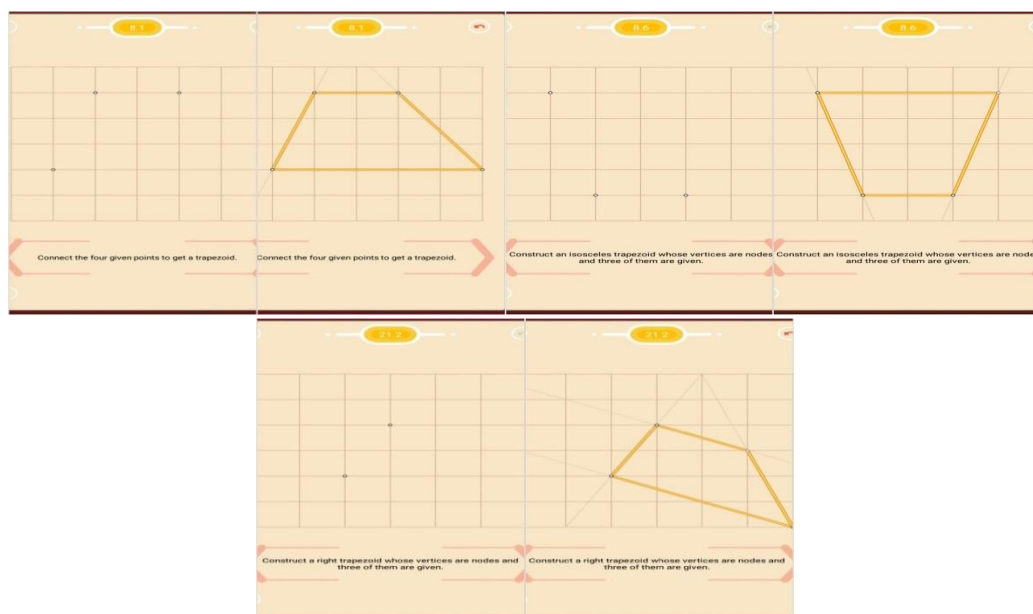
Aplicația: [Pythagorea](#)



Reguli:

Se accesează aplicația **Pythagorea** și se selectează:

- „Trapezoids” = Trapeze
- „Right trapezoids” = Trapeze dreptunghice



Aplicația: [LearningApps](#)

[LearningApps.org](#)

Link: <https://learningapps.org/view21276183>

Linia mijlocie în trapez

Aplicația recomandată: GeoGebra

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.4. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.4. Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

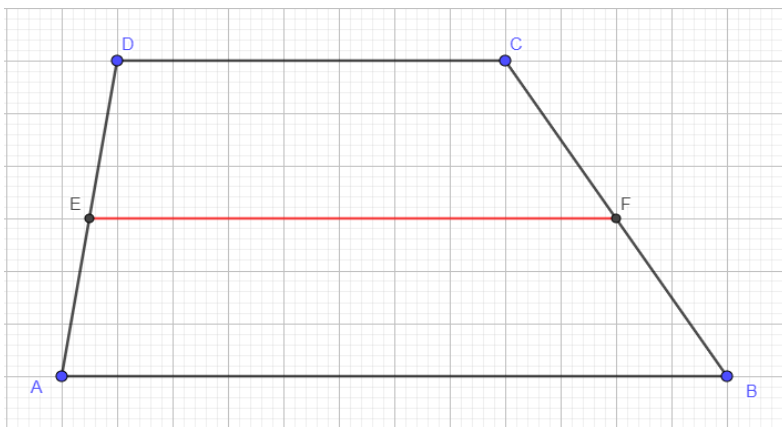
CS 3.4. Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.4. Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulatere

Repere!

Definiție: Segmentul care unește mijloacele a două laturi neparalele ale unui trapez se numește linie mijlocie în trapez.



Astfel știm că **ABCD** trapez,
 E – mijlocul segmentului AD
 F – mijlocul segmentului BC \Rightarrow **EF linie mijlocie.**

EF – linie mijlocie în trapezul $ABCD$, atunci:

$AB \parallel EF \parallel CD$ și

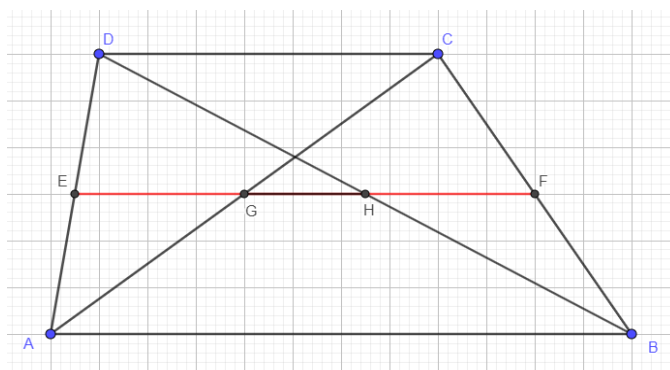
$$EF = \frac{AB + CD}{2}$$

Teoremă. Într-un trapez linia mijlocie este paralelă cu cele două baze și măsoară jumătate din suma celor două baze.

Teoremă: Într-un trapez lungimea segmentului determinat de intersecțiile liniei mijlocii cu diagonalele este egală cu jumătate din modulul diferenței lungimilor bazei.

$ABCD$ – trapez, AC și BD – diagonale, EF – linie mijlocie

$$\begin{aligned} AC \cap EF &= \{G\} \\ BD \cap EF &= \{H\} \end{aligned} \Rightarrow GH = \frac{|AB - CD|}{2}$$



Pot să aplic!



Nivel 1

Un trapez $ABCD$ are bazele $AB \parallel CD$, $AB = 4 \text{ cm}$ și $DC = 18 \text{ cm}$. Lungimea segmentului de pe linia mijlocie cuprins între diagonale este egală cu ... cm.



Nivel 2

În trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, avem $AC \perp BC$. Dacă $AB = 40 \text{ cm}$, linia mijlocie a trapezului va avea lungimea de ... cm.



Nivel 3

În triunghiul ABC , CD este mediană, $D \in AB$, iar E este mijlocul lui CD . Dacă $AE \cap BC = \{F\}$ și $BC = 39 \text{ cm}$, lungimea segmentului CF este ... cm.

Aplicații recomandate!

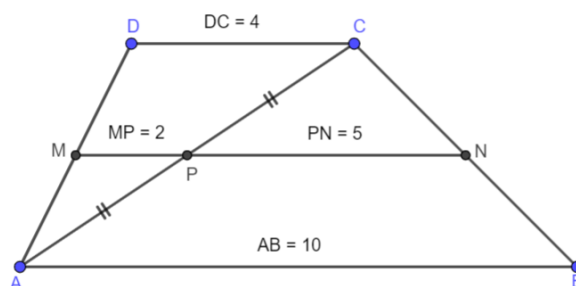
Aplicația: [GeoGebra](#)



Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.
- ✓ Se construiește un trapez folosind pașii de mai sus

Figură:



Pași:

1.		Segment Se construiește segmentul AB .
2.		Mijloc sau centru Se fixează mijloacele segmentelor AD , respectiv BC și se notează cu M și N .
3.		Segment Se construiesc segmentele AC , respectiv MN .
4.		Intersecție Se fixează intersecția segmentelor MN și AC și se notează cu P .
5.		Distanță sau lungime Se măsoară lungimile segmentelor MN , AB , respectiv CD și se verifică egalitatea lor, proprietatea linie mijlocii sau se observă faptul că MP este linie mijlocie în $\triangle ADC$, iar PN , linie mijlocie în $\triangle ABC$.
6.		Salvare construcție.

Aplicația: [LearningApps](#)

[LearningApps.org](https://learningapps.org/view21276764)

Link: <https://learningapps.org/view21276764>

Aria triunghiului

Aplicația recomandată: GeoGebra

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

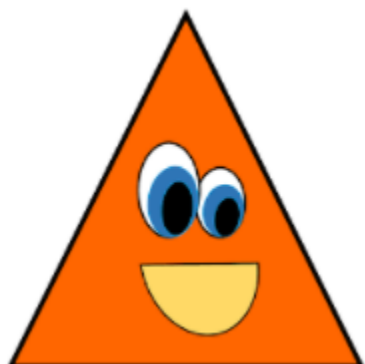
CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS. 5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii

CG 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

CS. 6.4. Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patrulete

Repere!



Aria triunghiului este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare ei.

$$A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2}$$

b este baza sau lungimea unei laturi

h este înălțimea corespunzătoare ei

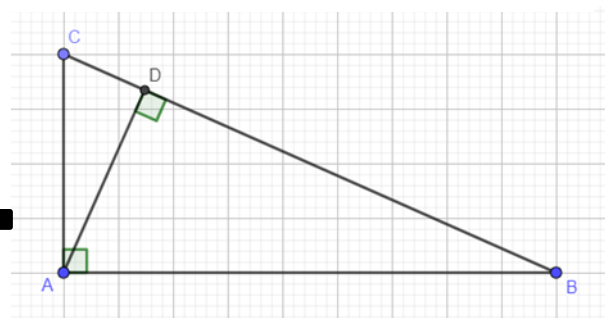
Exemplu: $A_{ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{BE \cdot AC}{2} = \frac{CF \cdot AB}{2}$

Dacă avem un triunghi dreptunghic, atunci **aria** sa este egală cu semiprodusul celor două catete.

$$A_{\Delta} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$$

c_1 și c_2 sunt catetele unui triunghi dreptunghic

Exemplu: $A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$



Pot să aplic!



Nivel 1

În triunghiul dreptunghic ABC , lungimea ipotenuzei BC este 25 cm, iar cateta AB are lungimea de 20 cm. Aria triunghiului ABC este de ... cm^2 .



Nivel 2

În triunghiul ABC , $\hat{B} = 30^\circ$, $BC = 12$ cm, $AB = 8$ cm. Aria triunghiului ABC este ... cm^2 , iar distanța de la C la AB este ... cm.



Nivel 3

Fie triunghiul ABC cu $AB = 9$ cm, $BC = 10$ cm și $AC = 6$ cm. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci triunghiurile AGC , AGB și GCB sunt

Aplicații recomandate!

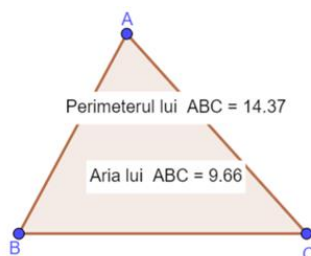
Aplicația: [GeoGebra](#)







Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

1.		Poligon Se construiește poligonul dorit. OBS! Dacă poligonul este construit, se marchează vârfurile sale.
2.		Distanță sau lungime Se dă click undeva în interiorul poligonului. Va apărea perimetrul calculat în interiorul poligonului.
3.		Arie Se dă click undeva în interiorul poligonului. Va apărea aria calculată în interiorul poligonului.
4.		Salvare construcție.

Aria patrulaterelor

Aplicații recomandate: GeoGebra, Angles, LearningApps, Quizizz, Kahoot!

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS. 5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii

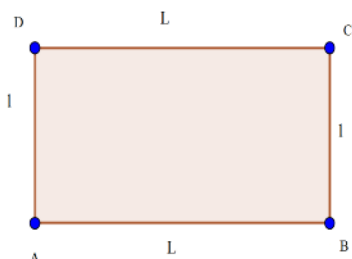
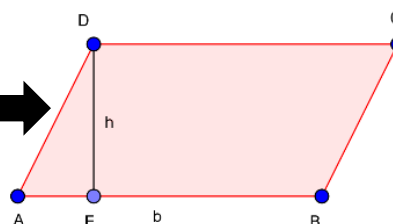
CG 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

CS. 6.4. Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patrulatere

Repere!

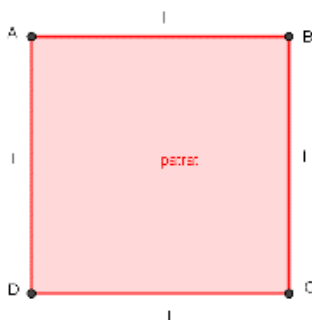
Aria unui paralelogram este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi b și înălțimea corespunzătoare ei h .

$$A = b \cdot h$$



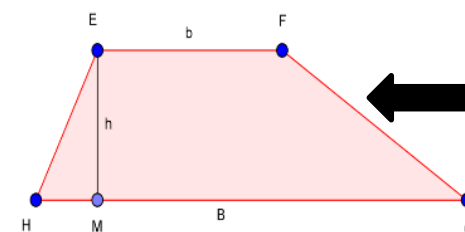
Aria unui dreptunghi este egală cu produsul dintre lungimea L și lățimea sa l .

$$A = L \cdot l$$



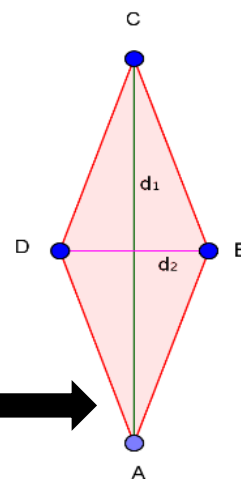
Aria unui pătrat este egală cu pătratul lungimii laturii sale l .

$$A = l^2$$



Aria unui trapez este egală cu semiprodusul dintre suma lungimilor bazelor sale B , b și lungimea înălțimii h a trapezului.

$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$



Aria unui romb este egală cu semiprodusul dintre lungimile diagonalelor sale d_1 și d_2 .

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Pot să aplic!



Nivel 1

Fie $ABCD$ dreptunghi cu lungimea de 24 cm și lățimea de 15 cm. Aria dreptunghiului este egală cu ... cm^2 .



Nivel 2

În pătratul $ABCD$ cu $AB = 12$ cm se ia punctul $N \in AD$ astfel încât $AN = 8$ cm și M mijlocul lui AB . Aria triunghiului MCN este egală cu ... cm^2 .



Nivel 3

Fie $ABCD$ un pătrat în care $AC \cap BD = \{O\}$, unde M este mijlocul lui AB , iar $AC \cap DM = \{N\}$. Dacă $AB = 12$ cm, aria triunghiului MNO este egală cu ... cm^2 .

Aplicații recomandate!

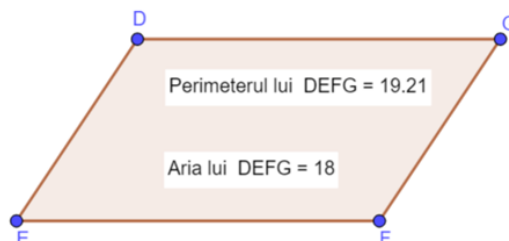
Aplicația: **GeoGebra**



Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

1.		Poligon Se construiește poligonul dorit. OBS! Dacă poligonul este construit, se marchează vârfurile sale.
2.		Distanță sau lungime Se dă click undeva în interiorul poligonului. Va apărea perimetrul calculat în interiorul poligonului.
3.		Arie Se dă click undeva în interiorul poligonului. Va apărea aria calculată în interiorul poligonului.
4.		Salvare construcție.

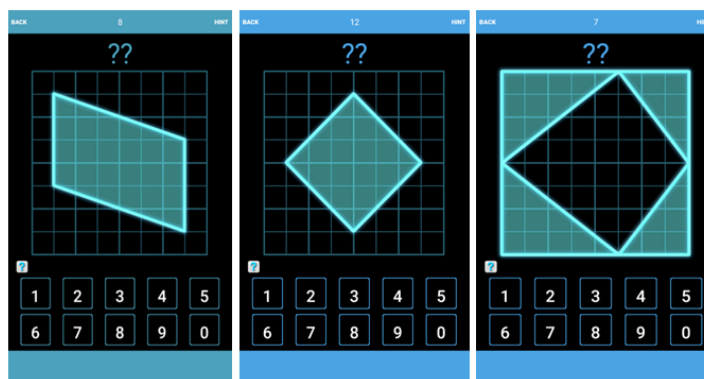
Aplicația: **Angles**



Reguli:

Se accesează aplicația **Angles** și se selectează:

- „Areas” = Arii



Aplicația: [LearningApps](#)

Link: <https://learningapps.org/view21276857>

<https://learningapps.org/view21276996>

Aplicația: [Quizizz](#)

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/5bdafc3668c661001a5d5791/test-de-evaluare-patrulateri-arii>

Aplicația: [Kahoot!](#)

Link: <https://play.kahoot.it/v2/lobby?quizId=26623f62-2e3b-412e-bad8-34aa1f028f52>

Capitolul II. CERCUL

Unghi înscris în cerc

Aplicația recomandată: GeoGebra

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.5. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.5. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.5. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

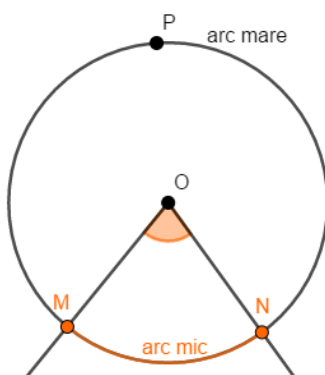
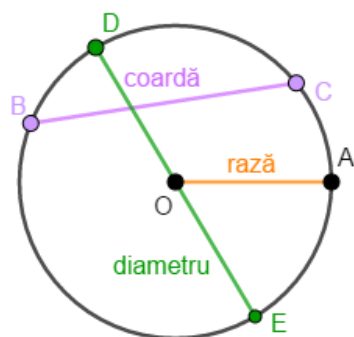
CS 4.5. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice

Repere!

Elementele unui cerc:



Măsura unui cerc este de 360° , iar măsura unui semicerc este de 180° .

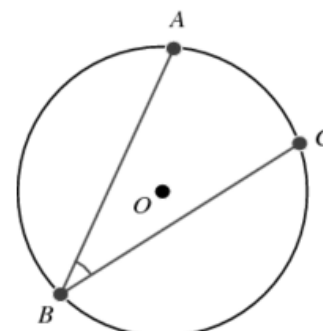
Măsura unui arc mic este egală cu măsura unghiului la centru, care îl subîntinde.

Exemplu:



$$\widehat{MN} = \widehat{MON}$$

$$\widehat{MPN} = 360^\circ - \widehat{MN}$$



Unghi înscris în cerc.

Definiție: Un unghi cu vârful pe cerc și ale cărui laturi sunt două coarde ale cercului se numește **unghi înscris în cerc**.

Teoremă: Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale:

$$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

Exemple:

$$\bullet \quad \widehat{AC} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

• 108 -

$$\bullet \quad \widehat{ABC} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$$

Pot să aplic!



Nivel 1

Coarda $[AB]$ a unui cerc de rază egală cu 6 cm are lungimea egală cu 6 cm. Măsura unghiului OAB are măsura de ... °.



Nivel 2

În cercul $C(O,R)$, se consideră diametrele $[AB]$ și $[CD]$. Unghiurile BDC și CAB sunt două unghiuri

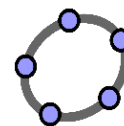


Nivel 3

Pe cercul $C(O,R)$, se iau punctele A și B diametral opuse. Prin cele două extremități ale diametrului se duc două coarde paralele AC și, respectiv, BD . Unghiurile CAB și ABD sunt

Aplicații recomandate!

Aplicația: **GeoGebra**

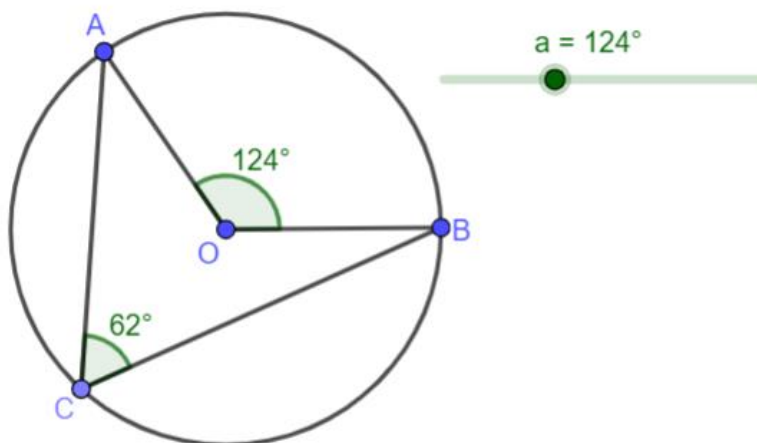


Arătați că măsura unui unghi înscris într-un cerc este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale








Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem **Meniul**, selectăm **Vizualizare**, apoi **Bloc Desen**.

Figură:



Pași:

1.		Cerc cu centru printr-un punct Se construiește cercul de centru O și care trece prin punctul A .
2.		Cursor Se alege un cursor notat cu a , de tip unghi, cu valori între 0° și 360° .
3.		Unghi de mărime dată Se construiește unghiul la centru AOB de mărime a .
4.		Punct Pe arcul mare AB se alege un punct C .
5.		Segment Se construiesc segmentele OA , OB , AC , BC .
6.		Unghi Se măsoară și se compară unghiurile AOB și ACB , mutând cursorul.
7.		Salvare construcție.

Coarde și arce în cerc

Aplicația recomandată: GeoGebra

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.5. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.5. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.5. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.5. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic

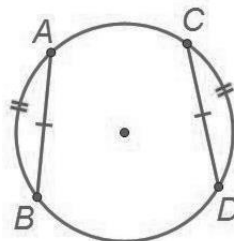
CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice

Repere!

Teoremă: În același cerc sau în cercuri congruente, la arce congruente corespund coarde congruente.

Teoremă: În același cerc sau în cercuri congruente, la coarde congruente corespund arce congruente.

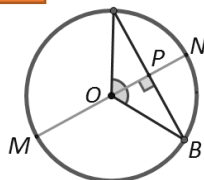


Exemple:

$$\widehat{AB} \equiv \widehat{CD} \Rightarrow AB \equiv CD$$

$$AB \equiv CD \Rightarrow \widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$$

Teoremă: Într-un cerc, diametrul perpendicular pe o coardă trece prin mijlocul coardei respective.

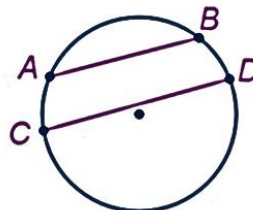


Exemplu: MN – diametru

AB – coardă

$$MN \perp AB \Rightarrow P - \text{mijlocul lui } AB$$

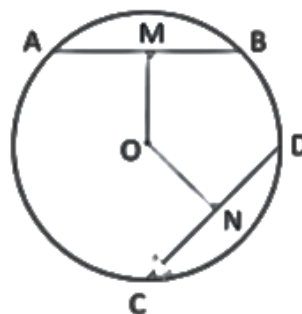
Teoremă: Dacă două coarde ale unui cerc sunt paralele, atunci arcele de cerc cuprinse între acestea sunt congruente.



Exemplu: $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} \equiv \widehat{BD}$

Teoremă: În același cerc sau în cercuri congruente, coardele congruente sunt egal depărtate de centrul cercului.

Teoremă: În același cerc sau în cercuri congruente, coardele egal depărtate de centrul cercului sunt congruente.



Exemple:

$$AB \equiv CD \Rightarrow OM \equiv ON$$

$$OM \equiv ON \Rightarrow AB \equiv CD$$

Pot să aplic!



Nivel 1

Într-un cerc $C(O, R)$, $R = 18$ cm, se trasează o coardă $[AB]$ aflată la distanța de 8 cm de centrul cercului. Perimetrul patrulaterului $AOBD$ este egal cu ... cm.



Nivel 2

În cercul $C(O, R)$, diametrul $[MN]$ este perpendicular de coarda $[PQ]$. Știind că $PQ \cap MN = \{S\}$ și că $[OS] \equiv [SN]$, triunghiul MPQ este

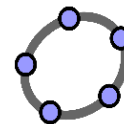


Nivel 3

Pe cercul $C(O, R)$ se iau punctele M, N, P, Q, R și S (în această ordine), astfel încât $MN \parallel QS$ și $MP \parallel SR$. Segmentele NR și PQ sunt

Aplicații recomandate!

Aplicația: **GeoGebra**

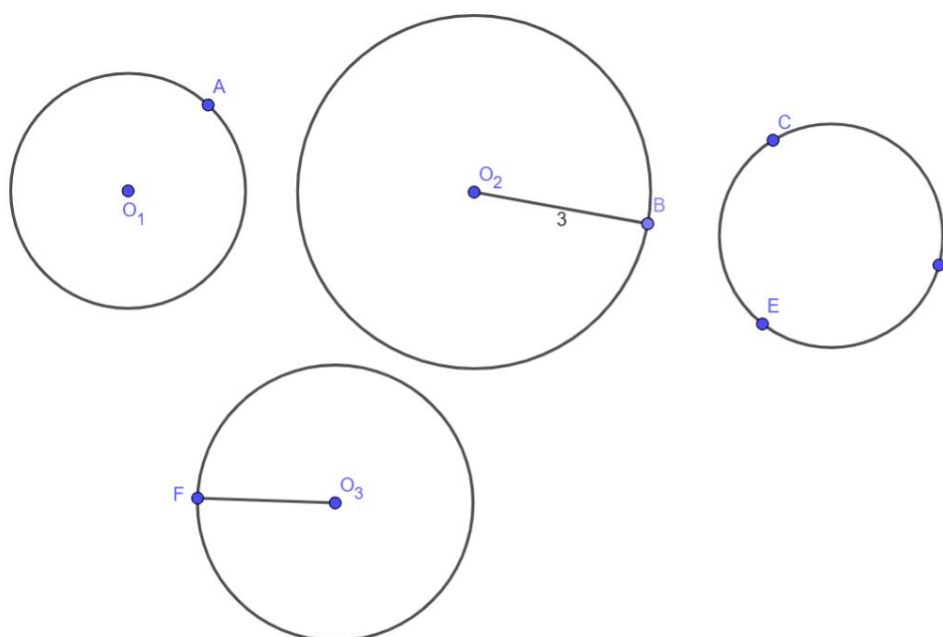


Cercul: construcție






Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

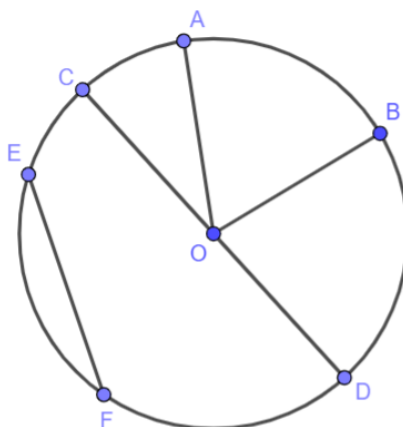
1.		Cerc cu centru prin punct Se desenează un cerc, alegând centrul cercului (O_1) și un punct prin care să treacă cercul (A).
2.		Cerc cu centru și rază Se construiește un cerc, alegând centrul cercului (O_2) și lungimea razei (3).
3.		Cerc prin 3 puncte Se poate desena un cerc care trece prin 3 puncte date (C, D, E).
4.		Compas Se poate construi cercul alegând lungimea unui segment sau două puncte (lungimea razei) și apoi un punct ca fiind centrul cercului (O_3).
5.		Salvare construcție.

Coarde și arce în cerc, proprietăți







Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

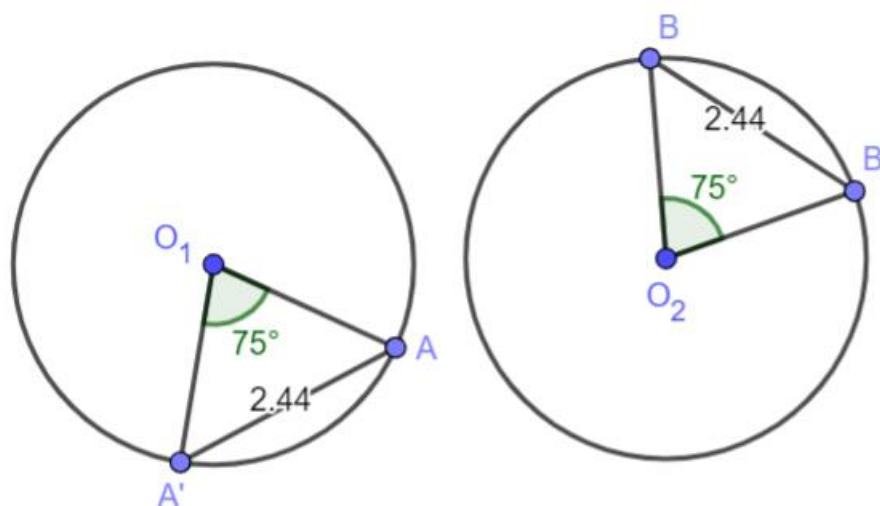
1.		Cerc cu centru prin punct Se desenează cercul cu centrul în punctul O și care trece prin punctul A .
2.		Segment Se desenează razele OA și OB , care formează unghiul la centru AOB Se desenează coarda $[EF]$.
3.		Punct Se alege un punct C pe cerc.
4.		Reflectare după un punct Se fixează simetricul punctului C față de O și se notează cu D .
5.		Segment Se desenează diametrul cercului CD .
6.		Salvare construcție.

Arătați că într-un cerc, sau în cercuri congruente, dacă două arce sunt congruente, atunci coardele corespunzătoare sunt congruente și reciproc.

Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

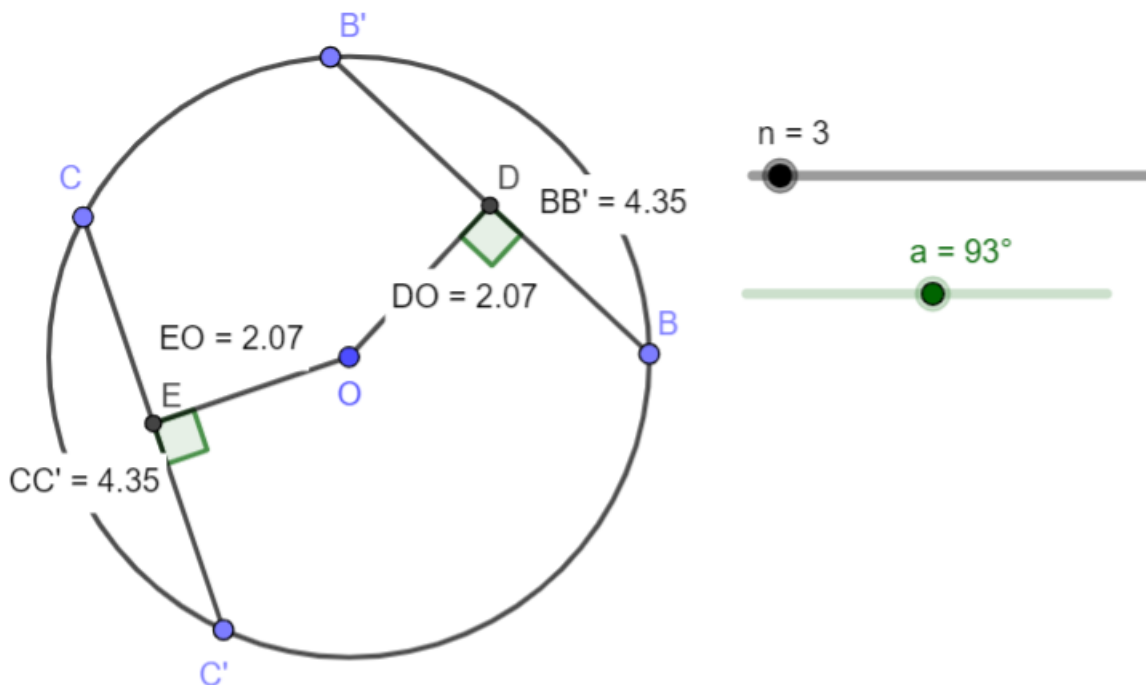
1.		Cerc cu centru și rază Se construiesc cercurile de centre O_1 , respectiv O_2 , având aceeași rază.
2.		Punct Se aleg un punct A pe un cerc și un punct B pe cel de-al doilea cerc.
3.		Unghi de mărime dată Se construiesc unghiurile congruente AO_1A' respectiv BO_1B' .
4.		Segment Se construiesc segmentele O_1A , O_1A' , AA' , O_2B , O_2B' , BB' .
5.		Distanță sau lungime Se măsoară și se verifică egalitatea lungimilor segmentelor AA' și BB' .
6.		Salvare construcție.

Arătați că într-un cerc, sau în cercuri congruente, dacă două coarde sunt congruente, atunci ele sunt egal depărtate de centrul cercului și reciproc.






Pregătiri:







- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem **Meniul**, selectăm **Vizualizare**, apoi **Bloc Desen**.

Figură:



Pași:

1.		Cursor Se aleg două cursoare, unul de tip întreg, notat cu n și unul de tip unghi, notat cu a .
2.		Cerc cu centru și rază Se construiește cercul de centru O și rază n .
3.		Punct Se aleg două puncte oarecare B și C pe cerc.
4.		Unghi de mărime dată Se construiesc unghiurile BOB' și COC' de mărime a .
5.		Segment Se construiesc segmentele congruente BB' și CC' .

6.		Perpendiculară Se construiesc perpendicularele din O pe BB' pe CC' .
7.		Intersecție Se fixează intersecțiile dintre perpediculara din O pe BB' cu BB' , respectiv dintre perpediculara din O pe CC' cu CC' și se notează cu D , respectiv E .
8.		Segment Se construiesc segmentele OD și OE .
9.		Arată/Ascunde obiecte Se ascund perpendicularele construite.
10.		Distanță sau lungime Se calculează lungimile segmentelor BB' , CC' , OD și OE și se observă congruențele $[OD] \equiv [OE]$ și $[BB'] \equiv [CC']$, mișcând pe rând cele două cursoare.
11.		Salvare construcție.

Tangente dintr-un punct exterior la cerc

Aplicația recomandată: GeoGebra

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.5. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme

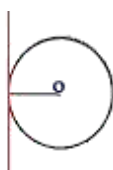
CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.5. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

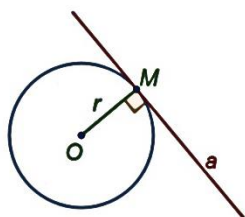
CS 5.5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice

Repere!



Ne amintim!

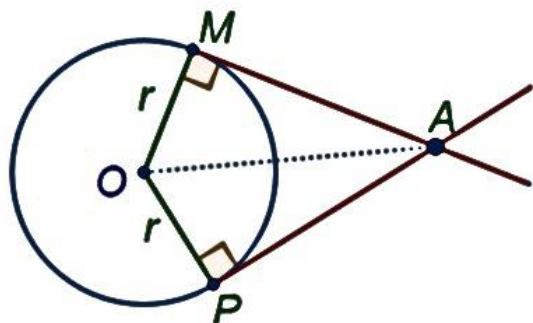
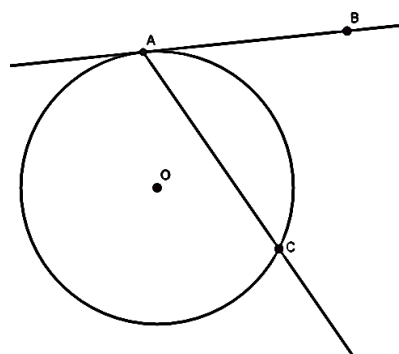
Dreapta tangentă cercului este dreapta care are un punct comun cu cercul (punctul de tangență).



Teoremă: Dacă dreapta a este tangentă cercului în punctul M , atunci $a \perp OM$.

Teoremă: Măsura unghiului cu vârful pe cerc, care are o latură tangentă la cerc, iar cealaltă latură secantă la cerc, este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturi.

Exemplu: $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{AC}}{2}$



Teoremă: (teorema „ciocului de cioară”)

Tangentele construite dintr-un punct exterior unui cerc la cercul respectiv sunt congruente.

AM – tangentă $\Rightarrow AM \equiv AP$

AP - tangentă

Pot să aplic!



Nivel 1

Fie A un punct exterior unui cerc $C(O, R)$, $R = 3$ cm. Dacă distanța de la punctul A la centrul cercului este de 5 cm, atunci distanța de la punctul A la punctul de tangență este de ... cm.



Nivel 2

Fie P un punct exterior unui cerc $C(O, R)$. Se construiesc tangentele PT și PQ , unde $T, Q \in C(O, R)$. Segmentele PO și TQ sunt

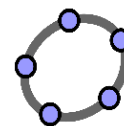


Nivel 3

Se consideră un cerc $C(O, R)$ și un punct M pe cerc. Prin M se duce o dreaptă d tangentă la cerc pe care se iau punctele A și B , astfel încât M să fie mijlocul segmentului AB . Știind că $OA \cap C(O, R) = \{P\}$ și $OB \cap C(O, R) = \{Q\}$. Patrulaterul $APQB$ este

Aplicații recomandate!

Aplicația: [GeoGebra](#)



Tangente dintr-un punct exterior la un cerc

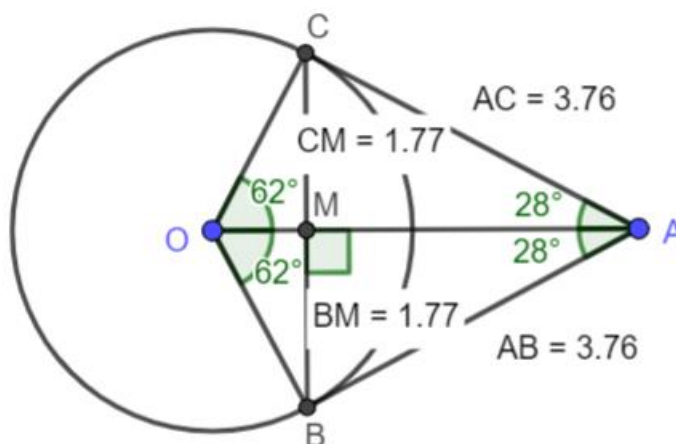
Fie A un punct exterior unui cerc $C(O, r)$ și AB și AC tangentele duse din punctul A la cerc.
Atunci:

- $AB \equiv AC$
- Semidreapta $(OA$ este bisectoarea unghiului BOC
- Semodreapta $(AO$ este bisectoarea unghiului BAC
- Dreapta OA este mediatoarea segmentului CD



Pregătiri:









- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

1.		Cerc cu centru și rază Se construiește cercul de centru O și raza de lungime dorită.
2.		Punct Se alege un punct A exterior cercului.

3.		Tangente Se construiesc tangentele la cerc din punctul A .
4.		Intersecție Se fixează intersecția dintre cele două tangente și cerc și se notează cu B , respectiv C .
5.		Segment Se construiesc segmentele AB , BC , OB , OC , BC , OA .
6.		Intersecție Se fixează intersecția dintre segmentele BC și OA și se notează cu M .
7.		Arată/Ascunde obiecte Se ascund dreptele AB și AC .
8.		Distanță sau lungime Se calculează și se compară lungimile segmentelor AB cu AC , respectiv CM cu BM .
9.		Unghi Se măsoară și se compară unghiurile BOA cu COA , respectiv BAO cu CAO , apoi se măsoară unghiul dintre dreptele OA și BC .
10.		Salvare construcție.

Poligoane regulate înscrise în cerc. Triunghiul echilateral

Aplicația recomandată: GeoGebra

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.5. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.5. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc

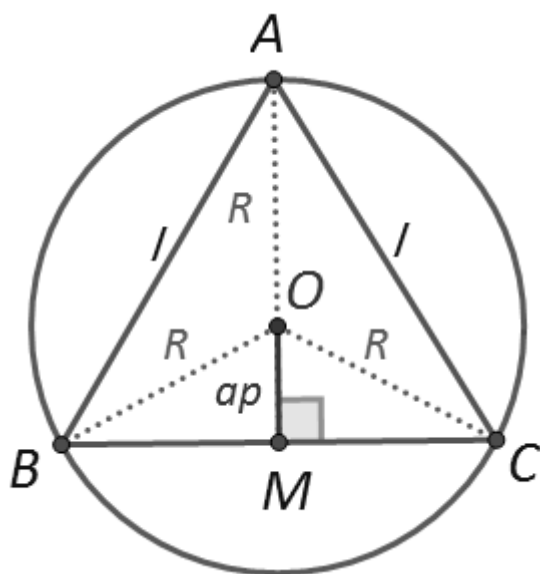
CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.5. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice

Repere!



$$A = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P = 3R\sqrt{3}$$

Fie triunghiul ABC echilateral.

Elemente:

- l latura triunghiului: $l = AB = AC = BC$
- R raza cercului circumscris: $R = OA = OB = OC$
- ap apotema triunghiului: OM

Formule:

$$l = R\sqrt{3}$$

$$ap = \frac{R}{2}$$

Segmentul AM este înălțime, mediană și bisectoare, pentru că într-un triunghi echilateral, liniile importante coincid. La fel se întâmplă și cu liniile care pornesc din B sau C . Prin urmare, OB și OC sunt bisectoare, iar $\angle OBM = \angle OCM = 30^\circ$. Triunghiul OBM este dreptunghic și cateta opusă unghiului de 30° este jumătate din ipotenuză, deci $ap = R/2$.

Exemplu: Fie triunghiul echilateral ABC de latură 9 cm.

$$R = \frac{l\sqrt{3}}{3} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$ap = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{3 \cdot (3\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{81\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

$$P = 3 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 27 \text{ cm}$$

Pot să aplic!



Nivel 1

Pe cercul de centru O și rază $R = 12$ cm se iau două puncte: A și B .

Dacă $m(\widehat{AOB}) = 60^\circ$, lungimea coardei AB este de ... cm.



Nivel 2

Apotema unui triunghi echilateral cu latura de 6 cm este ... cm.

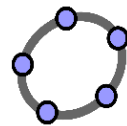


Nivel 3

În triunghiul echilateral ABC de latura 12 cm, raza cercului circumscris este de ... cm.

Aplicații recomandate!

Aplicația: **GeoGebra**

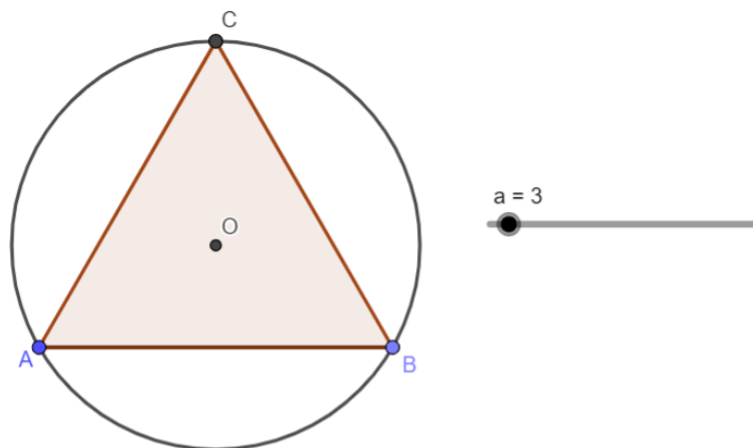


Arătați că între latura unui triunghi echilateral și raza cercului circumscris acestuia există relația $l = R\sqrt{3}$









Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem **Meniul**, selectăm **Vizualizare**, apoi **Bloc Desen**.

Figură:



Pași:

1.		Cursor Se alege un cursor de tip întreg notat cu a .
2.		Segment de lungime dată Se construiește segmentul AB de lungimea cursorului $a \cdot \sqrt{3}$ ($AB = \sqrt{3}$).
3.		Poligon regulat Se construiește triunghiul ABC .
4.		Mediatoare Se construiesc mediatoarele laturilor AC , respectiv BC .
5.		Intersecție Se fixează intersecțiile dintre cele două mediatoare și se notează cu O .
6.		Arată/Ascunde obiecte Se ascund cele două mediatoare.
7.		Cerc cu centru și rază Se construiește cercul cu centrul în O și rază a , apoi se modifică cursorul și se observă că cercul rămâne circumscris triunghiului.
8.		Salvare construcție.

Poligoane regulate înscrise în cerc. Pătratul

Aplicația recomandată: GeoGebra

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.5. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.5. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.5. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice

Repere!

Fie pătratul $ABCD$.

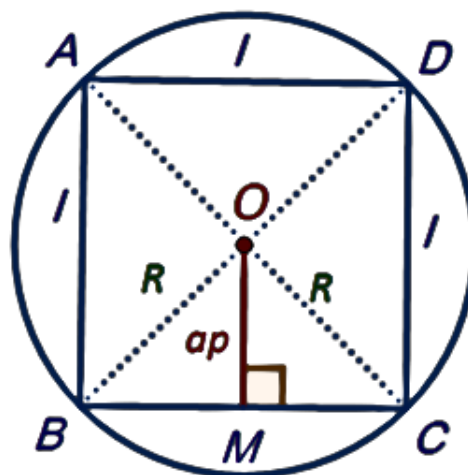
Elemente:

- l latura acestuia $l = AB = BC = CD = DA$
- R raza cercului $R = OA = OB = OC = OD$
- ap apotema pătratului: OM

Formule:

$$l = R\sqrt{2}$$

$$ap = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$



Triunghiul BOC este dreptunghic isoscel (pentru că diagonalele pătratului sunt perpendiculare și se

înjumătățesc) și vom aplica teorema lui Pitagora: $OB^2 + OC^2 = BC^2 \Rightarrow R^2 + R^2 = BC^2$

$\Rightarrow 2R^2 = BC^2$, de unde obținem că $l = BC = R\sqrt{2}$.

$$A = 2R^2$$

Aria pătratului este pătratul lungimii laturii.

$$P = 4R\sqrt{2}$$

Perimetrul pătratului se obține însumând cele patru laturi ale pătratului.

Exemplu:

Fie un pătrat cu latura de 6 cm. Atunci:



$$R = \frac{l\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$



$$A = 2 \cdot (3\sqrt{2})^2 = 36 \text{ cm}^2$$



$$ap = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 3 \text{ cm}$$



$$P = 4 \cdot (3\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = 24 \text{ cm}$$



Pot să aplic!



Nivel 1

Un pătrat $ABCD$ are latura de 6 cm.

Lungimea razei cercului circumscris pătratului este de ... cm.



Nivel 2

În cercul de centru O și raza R se înscriu un triunghi echilateral de latură 8 cm și un pătrat. Perimetrul pătratului este egal cu ... cm.

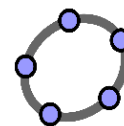


Nivel 3

Raportul dintre aria pătratului circumscris și aria pătratului înscris într-un cerc este egal cu

Aplicații recomandate!

Aplicația: **GeoGebra**

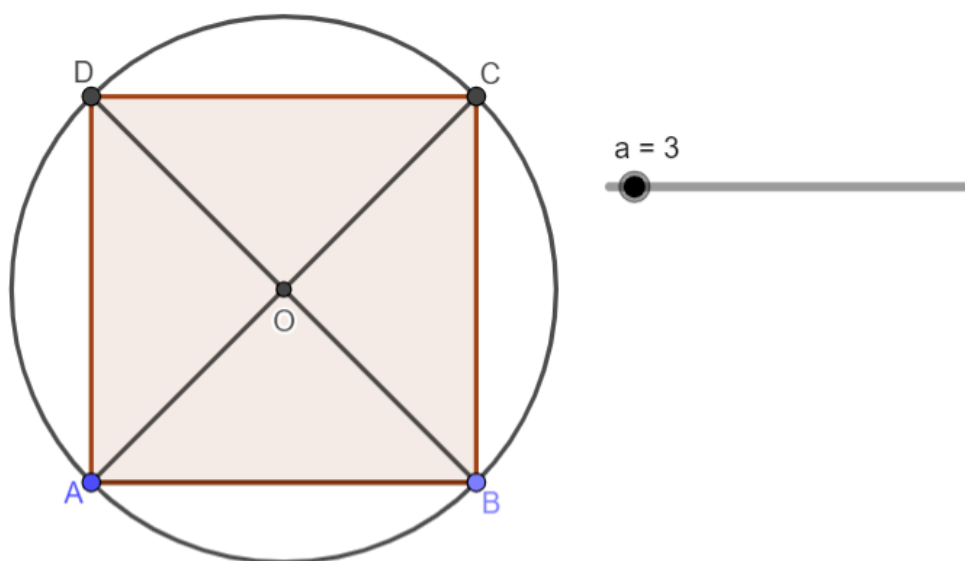


Arătați că între latura unui pătrat și raza cercului circumscris acestuia există relația $l = R\sqrt{2}$








Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

1.		Cursor Se alege un cursor de tip întreg notat cu a .
2.		Segment de lungime dată Se construiește segmentul AB de lungimea cursorului $a \cdot \sqrt{2}$ ($AB = \sqrt{2}$).
3.		Poligon regulat Se construiește pătratul $ABCD$.
4.		Segment Se construiesc segmentele AC și BD .
5.		Intersecție Se fixează intersecția dintre cele două diagonale AC și BD și se notează cu O .
6.		Cerc cu centru și rază Se construiește cercul cu centrul în O și rază a , apoi se modifică cursorul și se observă că cercul rămâne circumscris pătratului.
7.		Salvare construcție

Poligoane regulate înscrise în cerc. Hexagonul regulat

Aplicația recomandată: GeoGebra

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.5. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.5. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc

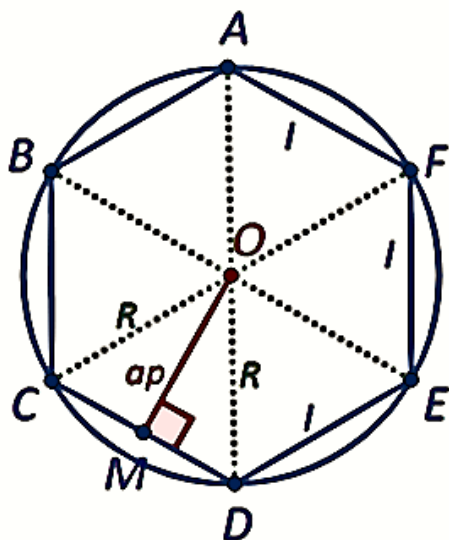
CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.5. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice

Repere!



Fie un hexagon regulat $ABCDEF$.

Elemente:

- l latura hexagonului: $AB = BC = \dots = FA$
- R raza cercului: $OC = OD = \dots = OB$
- ap apotema hexagonului: OM

Formule:

$$l = R$$

$$ap = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Triunghiul COD este isoscel, $OC = OD = R$, iar unghiul COD are 60° , prin urmare triunghiul COD este echilateral. Deci $l = CD = R$ și OM este înălțime în triunghiul echilateral.

$$A = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

Aria hexagonului se obține însumând ariile celor șase triunghiuri echilaterale congruente.

$$P = 6R$$

Perimetrul hexagonului se obține prin însumarea laturilor hexagonului.

Exemplu:

Fie un hexagon regulat cu latura de 12 cm. Atunci:



$$l = R = 12 \text{ cm}$$



$$ap = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$



$$A = \frac{3 \cdot 12^2 \sqrt{3}}{2} = 216\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



$$P = 6 \cdot 12 = 72 \text{ cm}$$



Pot să aplic!



Nivel 1

Hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură 4 cm este înscris într-un cerc.

Raza cercului are lungimea ... cm.



Nivel 2

Un hexagon regulat de latura 6 cm și un triunghi echilateral sunt înscrise într-un cerc. Aria triunghiului echilateral este egală cu ... cm^2 .



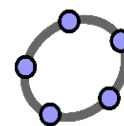
Nivel 3

Un pătrat cu latura de 8 cm și un hexagon regulat sunt înscrise în același cerc.

Perimetrul hexagonului regulat este de ... cm.

Aplicații recomandate!

Aplicația: **GeoGebra**

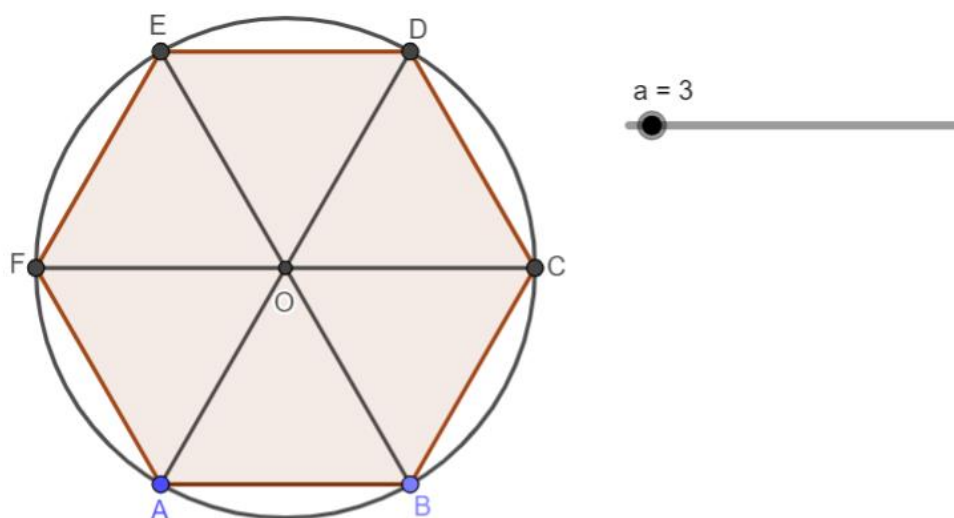


Arătați că între latura unui hexagon regulat și raza cercului circumscris acestuia există relația $l = R$








Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem **Meniul**, selectăm **Vizualizare**, apoi **Bloc Desen**.

Figură:



Pași:

1.		Cursor Se alege un cursor de tip întreg notat cu a .
2.		Segment de lungime dată Se construiește segmentul AB de lungimea cursorului a .
3.		Poligon regulat Se construiește poligonul regulat $ABCDEF$.
4.		Segment Se construiesc segmentele AD , BE și CF .
5.		Intersecție Se fixează intersecția dintre două diagonale AD și BE și se notează cu O .
6.		Cerc cu centru și rază Se construiește cercul cu centrul în O și rază a , apoi se modifică cursorul și se observă că cercul rămâne circumscris hexagonului.
7.		Salvare construcție.

Lungimea cercului. Aria discului

Aplicația recomandată: Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.5. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.5. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic

Repere!



Lungimea cercului de rază R , notată L_{cerc} , este dată de formula:

$$L_{cerc} = 2\pi R$$

Exemplu: Lungimea cercului care are raza de $3\sqrt{2}$ cm este:

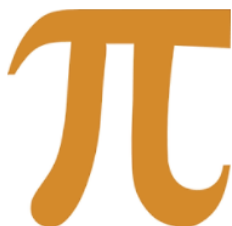
$$L_{cerc} = 2\pi R = 2\pi \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\pi \text{ cm}$$

Aria discului de rază R , notată A_{disc} , este dată de formula:

$$A_{disc} = \pi R^2$$

Exemplu: Aria discului mărginit de un cerc cu raza de $2\sqrt{5}$ cm este:

$$A_{disc} = \pi R^2 = \pi \cdot (2\sqrt{5})^2 = \pi \cdot 20 = 20\pi \text{ cm}^2$$



Definiție:

Valoarea raportului dintre lungimea unui cerc și lungimea diametrului său se notează cu π și este un număr irațional pe care în calcule îl aproximăm cu 3,14.

Pot să aplic!



Nivel 1

Lungimea unui cerc având raza egală cu 6 cm este de ... cm.

(Vom aproxima $\pi \approx 3,14$)



Nivel 2

Se dă un cerc de centru O și rază 12 cm și un unghi la centru cu măsura de 30° . Aria sectorului de cerc corespunzător lui este de ... cm^2 .

(Vom aproxima $\pi \approx 3,14$)



Nivel 3

Un hexagon regulat de latură 6 cm se circumscrie un cerc. Aria discului este egală cu

(Vom aproxima $\pi \approx 3,14$)

Aplicatii recomandate!

Aplicația: Quizizz



Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/5c497a933f95b2001a53186d/cercul>

Capitolul III. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante

Aplicații recomandate: GeoGebra, Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.6. Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.6. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii

Repere!



Definiție: Raportul a două segmente este raportul lungimilor lor exprimate în aceleași unități de măsură.

Exemplu:

Fie $AB = 4 \text{ cm}$ și $EF = 140 \text{ mm}$.

Atunci, $\frac{AB}{EF} = \frac{4 \text{ cm}}{140 \text{ mm}} = \frac{4 \text{ cm}}{14 \text{ cm}} = \frac{2}{7}$.

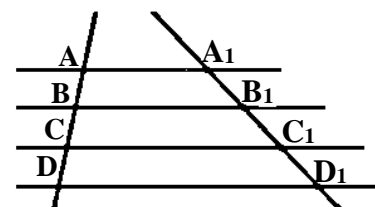


Definiție: Segmentele $[A_1B_1], [A_2B_2], \dots, [A_nB_n]$ și $[E_1F_1], [E_2F_2], \dots, [E_nF_n]$ se numesc **proporționale** dacă rapoartele lungimilor lor, exprimate cu aceleași unități de măsură, formează șirul de rapoarte egale:

$$\frac{A_1B_1}{E_1F_1} = \frac{A_2B_2}{E_2F_2} = \dots = \frac{A_nB_n}{E_nF_n}.$$

Teorema paralelor echidistante: Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci acestea determină pe orice secantă segmente congruente.

$$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \Rightarrow [AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \Rightarrow [A_1B_1] \equiv [B_1C_1] \equiv [C_1D_1]$$



Pot să aplic!



Nivel 1

Fie A, B, C puncte coliniare, în această ordine, cu $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm.

Raportul $\frac{AC}{BC}$ este egal cu



Nivel 2

În triunghiul ABC , $[AD]$ este mediană, $D \in (BC)$. Perpendiculara în A pe AD intersectează paralelele prin B și C la AD în punctele E și F , atunci $[AE] \dots [AF]$



Nivel 3

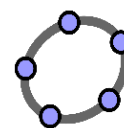
În triunghiul ABC , cu $AB = 48$ cm, considerăm mediana $[CM]$, $CM = 64$ cm. Dacă $D, E, F \in [BC]$ astfel încât $BD = DE = EF = FC$ și $I, H, G \in [CM]$ astfel încât $DI \parallel EH \parallel FG$, lungimea segmentelor DI , EH și FG este

Aplicații recomandate!

Aplicația: [Quizizz](https://quizizz.com)

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/61d41e64004b58001d87b56e>





Aplicația: **GeoGebra**

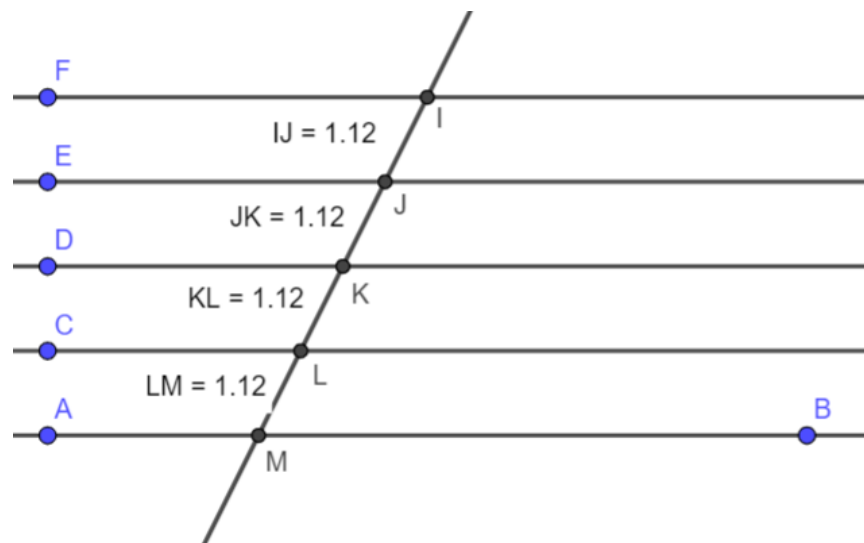
Teorema paralelelor echidistante

Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente.

Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem **Meniul**, selectăm **Vizualizare**, apoi **Bloc Desen**.

Figură:



Pași:

1.		Dreapta prin două puncte Se construiește dreapta care trece prin punctele A și B.
2.		Paralelă Se construiesc paralele egal depărtate între ele prin C, D, E și F la dreapta AB.
3.		Dreapta prin două puncte Se construiește o secantă la paralele.
4.		Intersecție Se fixează intersecția secantei cu paralele în punctele I, J, K, L și M.
5.		Distanță sau lungime Se calculează și se compară distanțele $IJ = JK = KL = LM$.
6.		Salvare construcție.

Teorema lui Thales. Reciproca teoremei lui Thales.

Teorema bisectoarei

Aplicații recomandate: GeoGebra, Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.6. Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

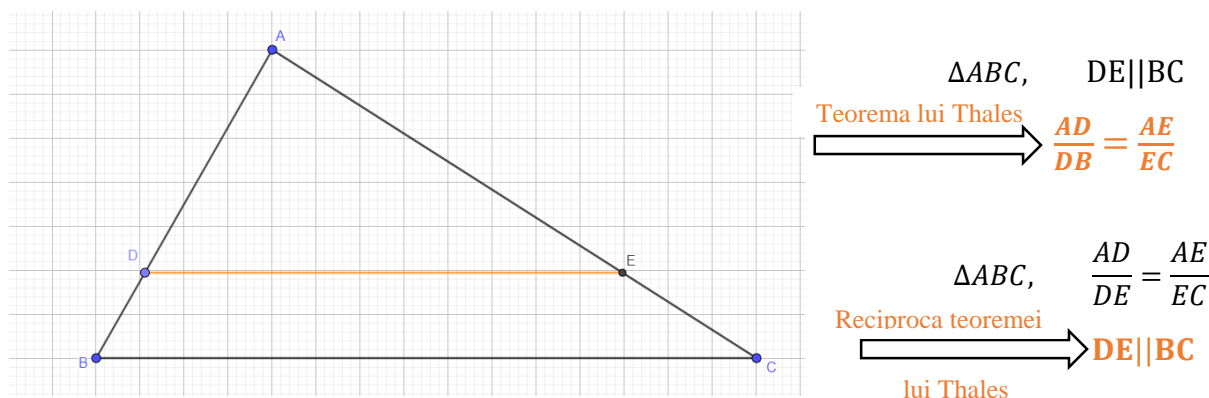
CS 3.6. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.6. Exprimarea în limbaj matematic a proprietăților unor figuri geometrice folosind asemănarea

Repere!

Teorema lui Thales: O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi, sau pe prelungirile lor, segmente proporționale.

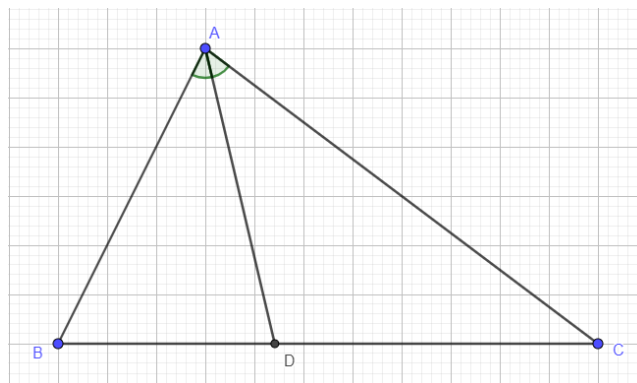


Reciproca teoremei lui Thales: Dacă o dreaptă determină pe două dintre laturile unui triunghi segmente proporționale, atunci ea este paralelă cu cea de-a treia latură a triunghiului.

Teorema bisectoarei

Într-un triunghi bisectoarea unui unghi determină pe latura opusă două segmente proporționale cu celelalte două laturi.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$



Pot să aplic!



Nivel 1

Se consideră triunghiul MNP și punctele $R \in (MN)$ și $Q \in (NP)$, astfel încât $RQ \parallel MP$. Dacă $RN = 4$ cm, $MN = 10$ cm și $NP = 15$ cm, atunci QP are lungimea ... cm.



Nivel 2

Fie M mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC . Dacă $[MN]$ este bisectoarea unghiului AMC , $N \in (AC)$ și $[MP]$ este bisectoarea unghiului AMB , $P \in (AB)$, segmentele PN și BC sunt ...



Nivel 3

În triunghiul ABC , semidreapta $[BM]$ este bisectoarea unghiului ABC , $M \in (AC)$. Dacă $AB = 15$ cm, $BC = 24$ cm și $AC = 26$ cm, lungimea segmentului AM este de ... cm.

Aplicații recomandate!

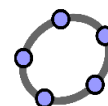
Aplicația: [Quizizz](https://quizizz.com/admin/quiz/61cde2fd371165001da47732)

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/61cde2fd371165001da47732>



Aplicația: **GeoGebra**

Teorema lui Thales

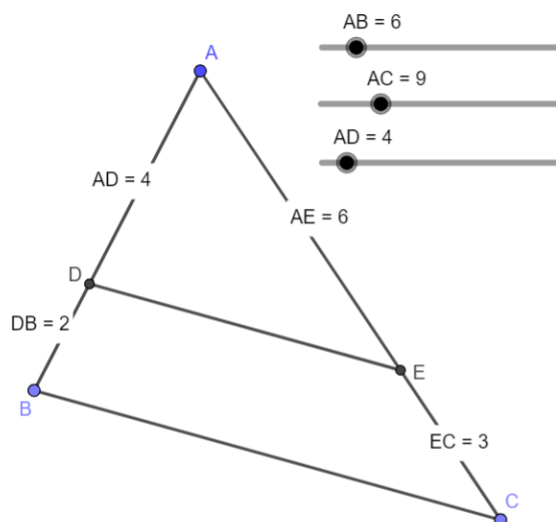


O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi sau pe prelungirile acestora segmente proporționale.

Pregătiri:





- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem **Meniul**, selectăm **Vizualizare**, apoi **Bloc Desen**.

Figură:



Pași:

1.		Cursor Se aleg trei cursoare de tip întreg notate AB , AC , respectiv AD .
2.		Segment de lungime dată Se construiesc segmentele de lungimea cursorului AB , respectiv AC .
3.		Segment Se construiește segmentul BC .
4.		Cerc cu centru și rază Se construiește cercul cu centrul în A și rază AD .
5.		Intersecție Se fixează intersecția dintre cerc și AB și se notează cu D .
6.		Paralelă Se construiește paralela prin D la BC .
7.		Intersecție Se fixează intersecția dintre paralelă și AC și se notează cu E .

8.		Segment Se construiește segmentul DE .
9.		Arată/Ascunde obiecte Se ascund cercul și dreapta paralelă.
10.		Distanță sau lungime Se calculează lungimile segmentelor AD , DB , AE , EC și se compară rapoartele $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, mutând cursoarele pe rând.
11.		Salvare construcție.

Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării

Aplicații recomandate: GeoGebra, Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.6. Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.6. Stabilirea relației de asemănare între triunghiuri

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.6. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

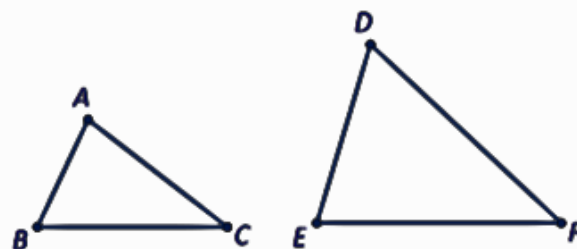
CS 4.6. Exprimarea în limbaj matematic a proprietăților unor figuri geometrice folosind asemănarea

Repere!

Definiție: Triunghiurile ABC și DEF se numesc **triunghiuri asemenea** dacă:

$$\begin{aligned} \hat{A} &\equiv \hat{D}, & \hat{B} &\equiv \hat{E}, & \hat{C} &\equiv \hat{F} \\ \frac{AB}{DE} &= \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k \end{aligned}$$

raport de asemănare



Notatie: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

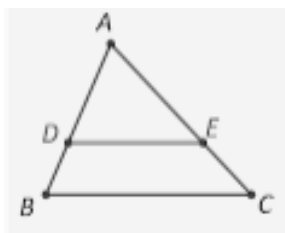
Teoremă: Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

$$\left. \begin{aligned} \triangle ABC \sim \triangle DEF \\ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle DEF}} = k^2$$

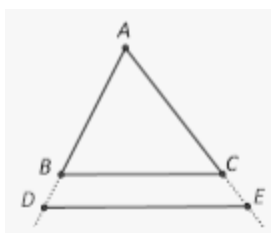
Teorema fundamentală a asemănării:

O paralelă construită la una dintre laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi ale triunghiului (sau cu prelungirile lor) un triunghi asemenea cu triunghiul dat.

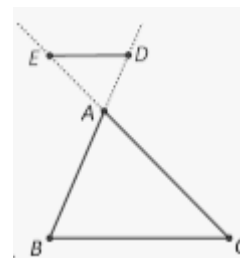
$$DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$



Caz I.



Caz II.



Caz III.

Pot să aplic!



Nivel 1

Triunghiul echilateral MNP are latura NP de lungime 12 cm. Pe latura MN se ia punctul A astfel încât $AM = 4$ cm, iar prin A se duce o paralelă la latura NP care taie latura MP în punctul B . Perimetrul patrulaterului $ABPN$ este egal cu ... cm.



Nivel 2

În patrulaterul $ABCD$, cu $BC = 12$ cm, $AD = 2AB$, se duce bisectoarea AE a unghiului BAD , $E \in (BD)$. Prin E se duce paralela EF cu BC , $F \in (DC)$. Lungimea segmentului EF este de ... cm.

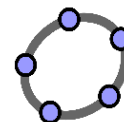


Nivel 3

Prin mijlocul M al laturii $[AD]$ a paralelogramului $ABCD$ se duce o paralelă la diagonala $[BD]$, care intersectează prelungirile BC și DC în N și, respectiv, P . Știind că diagonala $BD = 24$ cm, lungimea segmentului NP este ... cm.

Aplicații recomandate!

Aplicația: **GeoGebra**

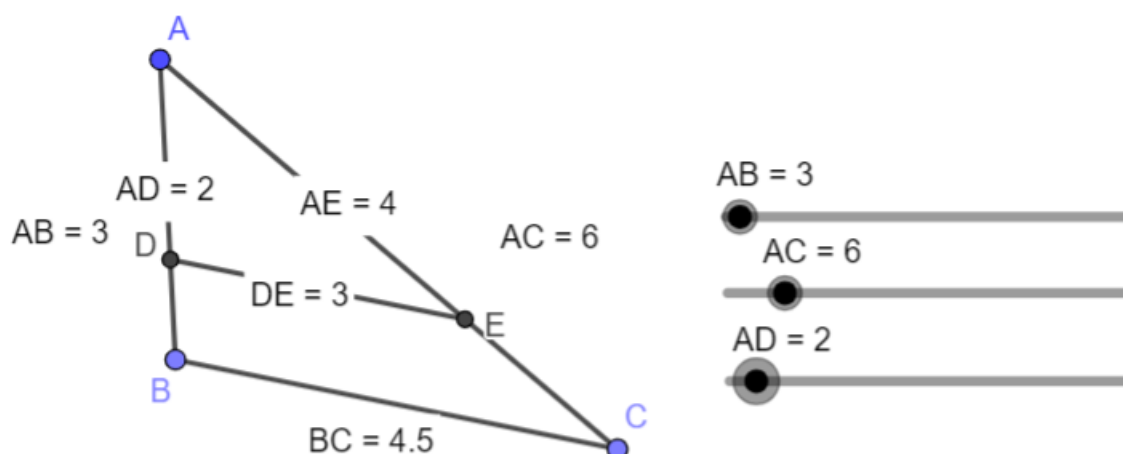


O paralelă dusă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi, sau pe prelungirile acestora, un triunghi asemenea cu cel dat.









Pregătiri:




- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

1.		Cursor Se aleg trei cursoare de tip întreg notate AB , AC , respectiv AD .
2.		Segment de lungime dată Se construiesc segmentele de lungimea cursorului AB , respectiv AC .
3.		Segment Se construiește segmentul BC .
4.		Cerc cu centru și rază Se construiește cercul cu centrul în A și rază AD .
5.		Intersecție Se fixează intersecția dintre cerc și AB și se notează cu D .
6.		Paralelă Se construiește paralela prin D la BC .
7.		Intersecție Se fixează intersecția dintre paralelă și AC și se notează cu E .
8.		Segment Se construiește segmentul DE .

9.		Arată/Ascunde obiecte Se ascund cercul și dreapta paralelă.
10.		Distanță sau lungime Se calculează lungimile segmentelor AD , AB , AE , AC , DE , BC și se compară rapoartele $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, mutând cursoarele pe rând.
11.		Salvare construcție.

Aplicația: [Quizizz](https://quizizz.com/admin/quiz/61d426205e027a001e95e9fb)



Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/61d426205e027a001e95e9fb>

Criteriile de asemănare a două triunghiuri

Aplicații recomandate: GeoGebra, Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.6. Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.6. Stabilirea relației de asemănare între triunghiuri

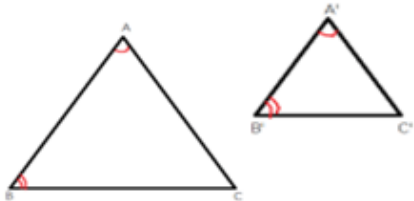
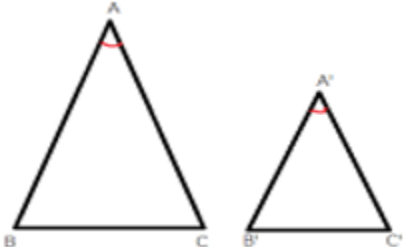
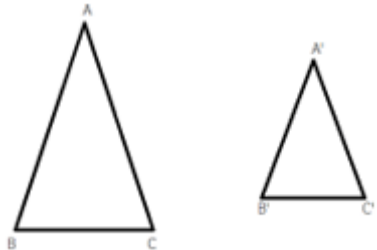
CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.6. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.6. Exprimarea în limbaj matematic a proprietăților unor figuri geometrice folosind asemănarea

Repere!

Criteriul de asemănare U.U. (unghi – unghi)	Criteriul de asemănare L.U.L. (latură – unghi – latură)	Criteriul de asemănare L.L.L. (latură – latură – latură)
<p>Dacă două triunghiuri au două unghiuri respectiv congruente, atunci ele sunt asemenea.</p>  <p>Ipoteză: $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ $\hat{B} \equiv \hat{B}'$</p> <p>Concluzie: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$</p>	<p>Dacă un triunghi are un unghi respectiv congruent cu unghiul altui triunghi și laturile care formează cele două unghiuri sunt respectiv proporționale, atunci cele două triunghiuri sunt asemenea.</p>  <p>Ipoteză: $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$</p> <p>Concluzie: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$</p>	<p>Dacă două triunghiuri au laturile respectiv proporționale, atunci ele sunt asemenea.</p>  <p>Ipoteză: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$</p> <p>Concluzie: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$</p>

Pot să aplic!



Nivel 1

Dacă în triunghiul ABC avem $MN \parallel BC$, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $AB = 20$ cm, $AM = 8$ cm, $AC = 30$ cm și $BC = 35$ cm. Lungimea lui MN este ...cm.



Nivel 2

În triunghiul MNP , $MN = 16$ cm, $NP = 32$ cm și $MP = 40$ cm se iau punctele $T \in (MN)$, $Q \in (NP)$ și $R \in (MP)$ astfel încât $TQ \parallel MP$, $QR \parallel MN$ și $TM = 10$ cm, $MR = 15$ cm. Perimetrul patrulaterului $MRQT$ este egal cu ... cm.

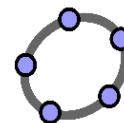


Nivel 3

În patrulaterul $ABCD$ cu latura $AD = 24$ cm se notează cu G_1 centrul de greutate al triunghiului ABC și cu G_2 centrul de greutate al triunghiului BCD . Lungimea segmentului G_1G_2 este egal cu ... cm.

Aplicații recomandate!

Aplicația: **GeoGebra**

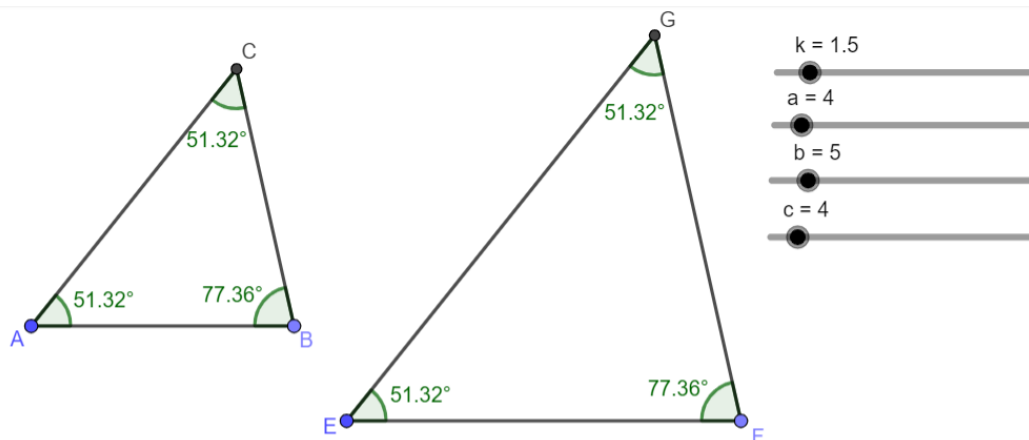


Asemănarea triunghiurilor cazul LLL

Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier *GeoGebra*;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Prezentare Algebrică* și *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

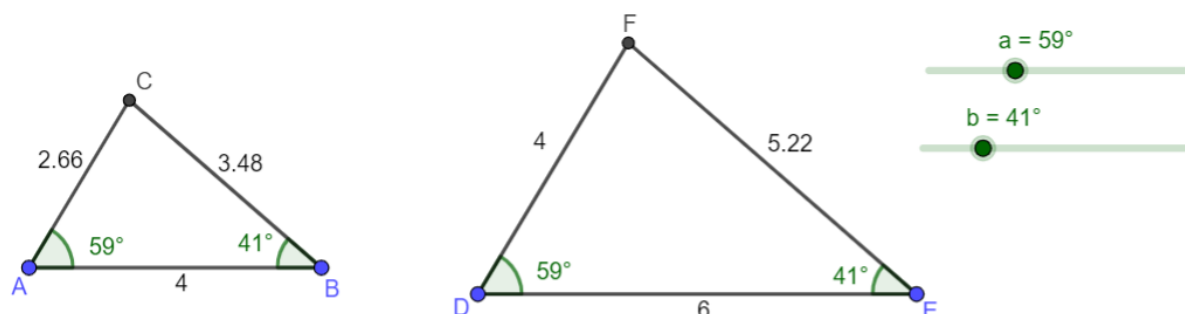
1.		Cursor Se aleg patru cursoare, unul de tip număr între 1 și 5, notat cu k , iar trei de tip întreg între 1 și 30, notate a , b , c .
2.		Segment de lungime Se construiesc segmentele AB și DE de lungimea cursorului c .
3.		Segment Se construiesc cercurile cu centrul în A și de rază b , cu centrul în B și de rază a , cu centrul în D și de rază $k*b$, cu centrul în E și de rază $k*a$.
4.		Intersecție Se fixează intersecția dintre primele două cercuri și se notează cu C , din ultimele două cercuri și se notează cu F .
5.		Segment Se construiesc segmentele AC , BC , DF și EF .
6.		Arată/Ascunde obiecte Se ascund cele patru cercuri și celelalte puncte de intersecție ale cercurilor pentru a evidenția cele două triunghiuri.
7.		Unghi Se măsoară unghiurile celor două triunghiuri și se verifică congruența lor, mutând cursoarele pe rând.
8.		Salvare construcție.

Asemănarea triunghiurilor cazul UU

Pregătiri:

- ✓ Deschideți un nou fișier *GeoGebra*;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Prezentare Algebrică* și *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

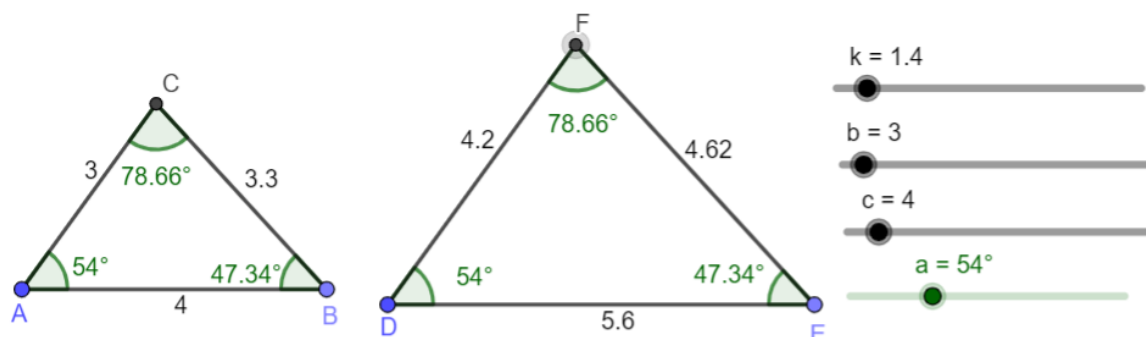
1.		Cursor Se aleg două cursoare de tip unghi între 0° și 180° notate a și b .
2.		Segment Se construiesc două segmente de lungimi diferite AB , respectiv DE .
3.		Unghi de mărime dată Se construiesc unghiurile cu vârful în A și D cu măsura cursorului a în sensul acelor de ceasornic și unghiurile cu vârful în B și E cu măsura cursorului b , în sens opus acelor de ceasornic, având una din laturi AB , respectiv DE .
4.		Semidreaptă Se construiesc semidreptele AA' , BB' , DD' , EE' .
5.		Intersecție Se fixează intersecția dintre AA' și BB' și se notează cu C , respectiv dintre DD' și EE' și se notează cu F .
6.		Segment Se construiesc segmentele AC , BC , DF și EF .
7.		Arată/Ascunde obiecte Se ascund cele patru semidrepte pentru a evidenția cele două triunghiuri.
8.		Distanță sau lungime Se măsoară lungimile laturilor celor două triunghiuri și se verifică egalitatea $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, mutând cele două cursoare.
9.		Salvare construcție.

Asemănarea triunghiurilor cazul LUL

Pregătiri:



- ✓ Deschideți un nou fișier *GeoGebra*;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Prezentare Algebrică* și *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

1.		Cursor Se aleg două cursoare de tip întreg între 1 și 30, notate b și c , un cursor de tip număr între 1 și 5, notat cu k și un cursor de tip unghi între 0° și 180° notat cu a .
2.		Segment Se construiesc două segmente AB și DE de lungimi c , respectiv $c*k$.
3.		Unghi de mărime dată Se construiesc unghiurile cu vârful în A și D , cu măsura cursorului a , în sensul acelor de ceasornic.
4.		Semidreaptă Se construiesc semidreptele AB' și DE' pentru a evidenția cele două unghiuri.
5.		Cerc cu centru și rază Se construiesc cercurile cu centrul în A și de rază b , respectiv cu centrul în D și rază $k*b$.
6.		Intersecție Se fixează intersecțiile dintre AB' și primul cerc și se notează cu C , respectiv dintre DE' și al doilea cerc și se notează cu F .
7.		Segment Se construiesc segmentele AC , BC , DF și EF .
8.		Arată/Ascunde obiecte Se ascund cele două semidrepte și cele două cercuri pentru a evidenția cele două triunghiuri.
9.		Distanță sau lungime Se măsoară lungimile laturilor celor două triunghiuri și se verifică egalitatea $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = k$, mutând pe rând cursoarele.

10.		Unghi Se măsoară unghiurile B , C , E , F și se verifică egalitatea $B = E$ și $C = F$, mutând cursoarele.
11.		Salvare construcție.

Aplicația: [Quizizz](https://quizizz.com/admin/quiz/61ce009b9b0a09001d6a00ee)

Quizizz

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/61ce009b9b0a09001d6a00ee>

Capitolul IV. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii

Aplicații recomandate: GeoGebra, Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.7. Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

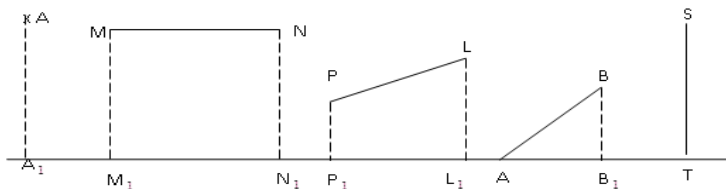
CS 4.7. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.7. Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic

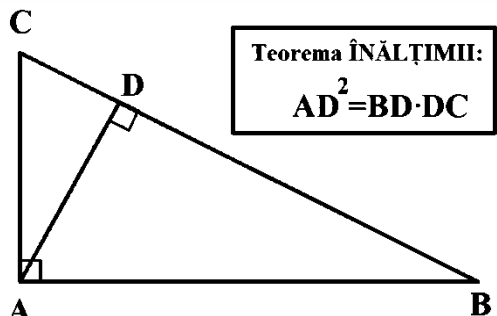
Repere!

Proiecții de puncte și de segmente pe o dreaptă



Teorema înălțimii:

- În orice triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii dusă din vârful unghiului drept este egală cu media geometrică dintre lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.



Teorema ÎNĂLȚIMII:
 $AD^2 = BD \cdot DC$

$$\Delta ABC, \hat{A} = 90^\circ$$

$$AD \perp BC$$

$$\Pr_{BC} AB = DB$$

$$\Pr_{BC} AC = DC$$

Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei duse din acel punct pe o dreaptă.

Notatie: $\Pr_d A = A_1$

Proiecția ortogonală a unui segment XY pe o dreaptă este un segment $X'Y'$, unde X' și Y' sunt proiecțiile ortogonale ale punctelor X și Y pe dreaptă.

Notatii: $\Pr_d MN = M_1N_1$

$$\Pr_d PL = P_1L_1$$

$$\Pr_d AB = AB_1$$

Observatie: Proiecția ortogonală a unui segment ST perpendicular pe o dreaptă este un punct.

Notatie: $\Pr_d ST = T$

$$AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$$

- Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii duse din vârful unghiului drept este egală cu raportul dintre produsul lungimilor catetelor și lungimea ipotenuzei.



Pot să aplic!



Nivel 1

Fie $BC = 50$ cm și un punct D pe BC astfel încât $BD = 18$ cm. Se ridică din D perpendiculara pe BC . Știind că triunghiul ABC este dreptunghic, lungimea segmentului AD este de ... cm.



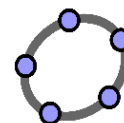
Nivel 2

În triunghiul dreptunghic ABC , $AD \perp BC$, $AD = 18$ cm, iar proiecția catetei AB este de 9 cm. Lungimea ipotenuzei BC este de ... cm.



Nivel 3

În trapezul isoscel $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD < BC$, $AC \perp AB$, $AB \equiv DC$, cu $AM \perp BC$, $M \in (BC)$, avem $BM = 12$ cm și $BC = 60$ cm. Lungimea lui AM este de ... cm.



Aplicații recomandate!

Aplicația: **GeoGebra**

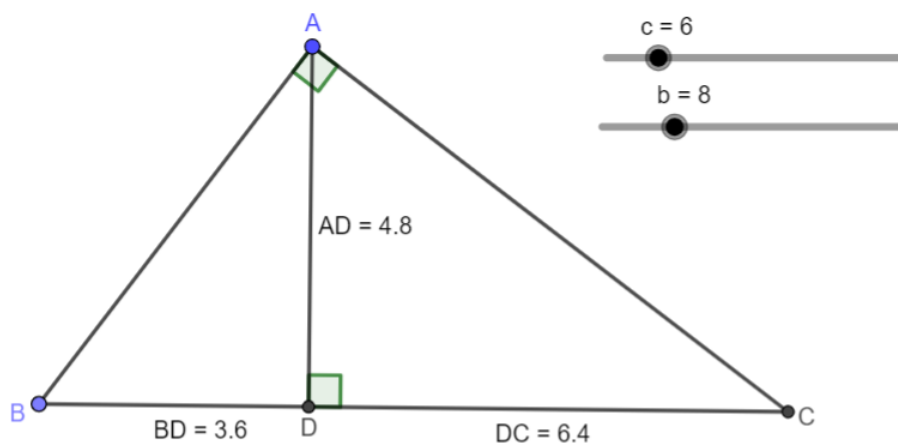
Teorema înălțimii

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a lungimilor catetelor pe ipotenuză.







Pregătiri:







- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Prezentare Algebrică* și *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

1.		Cursor Se aleg două cursoare de tip întreg notate c , respectiv b .
2.		Segment de lungime dată Se construiește segmentul AB de lungimea cursorului c .
3.		Perpendiculară Se construiește perpendiculara în punctul A pe AB .
4.		Cerc cu centru și rază Se construiește cercul cu centrul în A și rază b .
5.		Intersecție Se fixează intersecțiile dintre cerc și perpendiculara construită, iar unul dintre puncte se notează cu C .
6.		Segment Se construiește segmentul BC .

7.		Perpendiculară Se construiește perpendiculara în punctul A pe BC .
8.		Intersecție Se fixează intersecția dintre perpendiculara construită și BC și se notează cu D .
9.		Segment Se construiește segmentul AC , respectiv AD .
10.		Arată/Ascunde obiecte Se ascund cercul și cele două perpendiculare construite pentru a evidenția triunghiul dreptunghic și înălțimea din vârful unghiului drept.
11.		Distanță sau lungime Se calculează lungimile segmentelor AD , BD și DC și se verifică relația $AD^2 = BD \cdot DC$, mutând cursorul.
12.		Salvare construcție.

Aplicația: [Quizizz](#)

Quizizz

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/6251b4961bd20a001d70ff07>

Teorema catetei

Aplicații recomandate: GeoGebra, Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

CS 1.7. Recunoașterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configurație geometrică dată

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.7. Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.7. Deducerea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.7. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.7. Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic

Repere!



Teorema catetei:

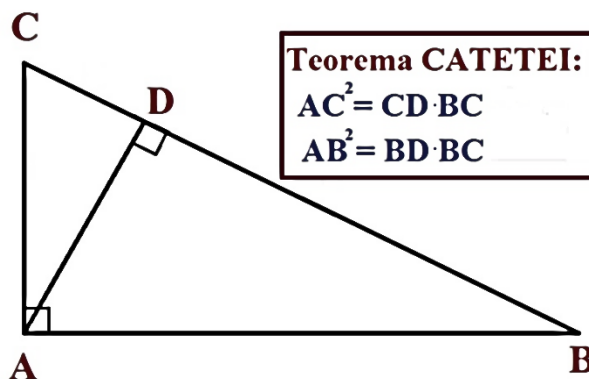
În orice triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este egală cu media geometrică (proporțională) dintre lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției acelei catete pe ipotenuză.

$$\triangle ABC, \hat{A} = 90^\circ$$

$$AD \perp BC$$

$$Pr_{BC} AB = DB$$

$$Pr_{BC} AC = DC$$



Teorema CATETEI:

$$AC^2 = CD \cdot BC$$

$$AB^2 = BD \cdot BC$$

Pot să aplic!



Nivel 1

Într-un triunghi dreptunghic ABC , $\hat{A} = 90^\circ$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, se dau $BD = 10,8$ cm și $AD = 14,4$ cm. Lungimea catetei AC este de ... cm.



Nivel 2

Într-un triunghi dreptunghic ABC , $\hat{A} = 90^\circ$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, se dau $BC = 10$ cm și $BD = 3,6$ cm. Lungimea catetei AC este de ... cm.

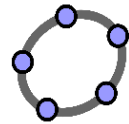


Nivel 3

Într-un triunghi dreptunghic ABC , $\hat{A} = 90^\circ$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, se dau $BC = 30$ cm și $BD = 18$ cm. Aria triunghiului ABC este egală cu ... cm^2 .

Aplicații recomandate!

Aplicația: [GeoGebra](#)



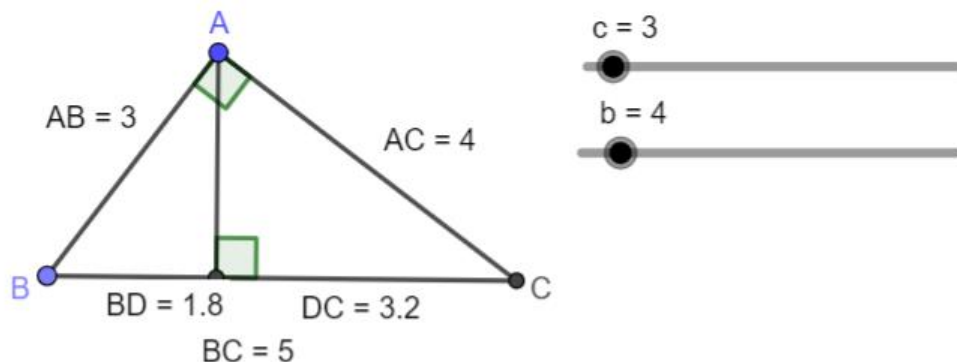
Teorema catetei

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este media geometrică a lungimii ipotenuzei și a lungimii proiecției catetei pe ipotenuză.








Pregătiri:






- ✓ Deschideți un nou fișier *GeoGebra*;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

1.		Cursor Se alege două cursoare de tip întreg notate c , respectiv b .
2.		Segment de lungime dată Se construiește segmentul AB de lungimea cursorului c .
3.		Perpendiculară Se construiește perpendiculara în punctul A pe AB .
4.		Cerc cu centru și rază Se construiește cercul cu centrul în A și rază b .
5.		Intersecție Se fixează intersecțiile dintre cerc și perpendiculara construită, iar unul dintre puncte se notează cu C .
6.		Segment Se construiește segmentul BC .
7.		Perpendiculară Se construiește perpendiculara în punctul A pe BC .

8.		Intersecție Se fixează intersecția dintre perpendiculara construită și BC și se notează cu D .
9.		Segment Se construiesc segmentele AC , respectiv AD .
10.		Arată/Ascunde obiecte Se ascund cercul și cele două perpendiculare construite, pentru a evidenția triunghiul dreptunghic, și înălțimea din vârful unghiului drept.
11.		Distanță sau lungime Se calculează lungimile segmentelor AB , AC , BC , BD și DC și se verifică relațiile $AB^2 = BC \cdot BD$, $AC^2 = BC \cdot DC$, mutând cursorul.
12.		Salvare construcție.

Aplicația: [Quizizz](https://quizizz.com/admin/quiz/6251b917fda5b0001d1a6732)

Quizizz

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/6251b917fda5b0001d1a6732>

Teorema lui Pitagora

Aplicații recomandate: GeoGebra, Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.7. Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.7. Deducerea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic

CG 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

CS 4.7. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.7. Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic

Repere!

Teorema lui Pitagora:

În orice triunghi dreptunghic, suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei (latura opusă unghiului drept).

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 9$$

$$4^2 = 16$$

$$5^2 = 25$$

$$6^2 = 36$$

$$7^2 = 49$$

$$8^2 = 64$$

$$9^2 = 81$$

$$10^2 = 100$$

$$11^2 = 121$$

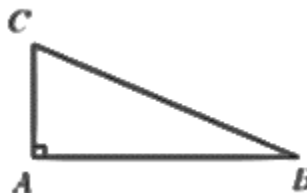
$$12^2 = 144$$

$$13^2 = 169$$

$$14^2 = 196$$

$$15^2 = 225$$

$$\Delta ABC, \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$



$$16^2 = 256$$

$$17^2 = 289$$

$$18^2 = 324$$

$$19^2 = 361$$

$$20^2 = 400$$

$$21^2 = 441$$

$$22^2 = 484$$

$$23^2 = 529$$

$$24^2 = 576$$

$$25^2 = 625$$

$$26^2 = 676$$

$$27^2 = 729$$

$$28^2 = 784$$

$$29^2 = 841$$

$$30^2 = 900$$

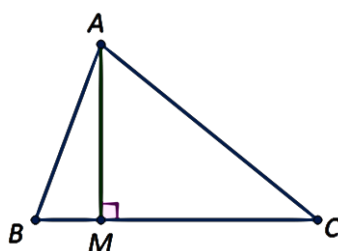
Reciproca teoremei lui Pitagora:

Dacă într-un triunghi pătratul lungimii unei laturi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.

Exemplu: Dacă $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ$.



Teorema lui Pitagora generalizată:



Fie $\Delta ABC, AM \perp BC, M \in BC$.

Dacă $\hat{C} < 90^\circ$, atunci:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CM$$

Dacă $\hat{C} > 90^\circ$, atunci:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CM$$

Pot să aplic!



Nivel 1

În triunghiul dreptunghic ABC , cateta $AB = 16$ cm, iar cateta $AC = 12$ cm. Ipoteenuza BC are lungimea ... cm.



Nivel 2

În dreptunghiul $ABCD$ cu lungimea $AD = 25$ cm și lățimea $AB = 12$ cm, punctul M aparține laturii BC , astfel încât $MC = 9$ cm. Măsura unghiului AMD este de ... °.

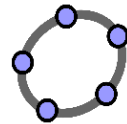


Nivel 3

Trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $AB \parallel CD$, $AB > DC$, are $AB = 50$ cm, $AD = 24$ cm și $CD = 18$ cm. Triunghiul ABC este

Aplicații recomandate!

Aplicația: [GeoGebra](#)



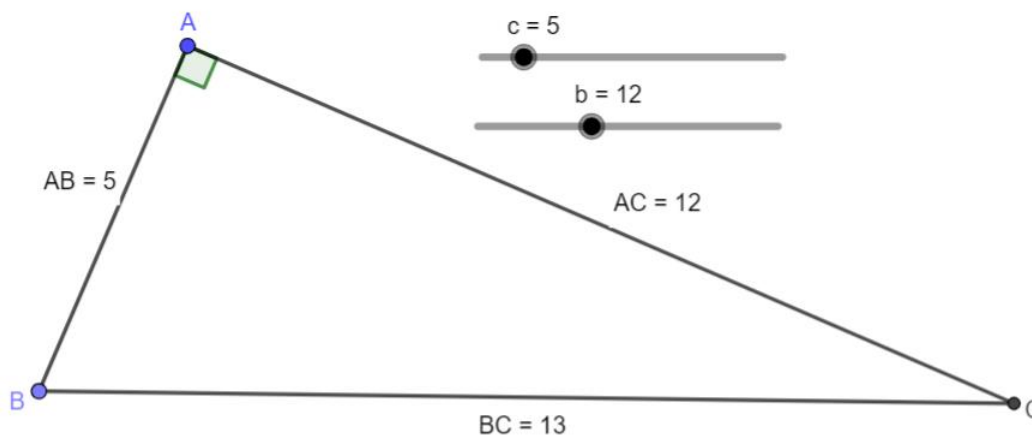
Teorema lui Pitagora

Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.







Pregătiri:




- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem *Meniul*, selectăm *Vizualizare*, apoi *Bloc Desen*.

Figură:



Pași:

1.		Cursor Se aleg două cursoare de tip întreg notate c , respectiv b .
2.		Segment de lungime dată Se construiește segmentul AB de lungimea cursorului c .
3.		Perpendiculară Se construiește perpendiculara în punctul A pe AB .
4.		Cerc cu centru și rază Se construiește cercul cu centrul în A și rază b .
5.		Intersecție Se fixează intersecțiile dintre cerc și perpendiculara construită, iar unul dintre puncte se notează cu C .
6.		Segment Se construiește segmentul BC .

7.		Arată/Ascunde obiecte Se ascund cercul și perpendiculara construite pentru a evidenția triunghiul dreptunghic.
8.		Distanță sau lungime Se calculează lungimile segmentelor AB , AC , BC și se verifică relația $AB^2 + AC^2 = BC^2$, mutând cursorul.
9.		Salvare construcție.

Aplicația: [Quizizz](#)

Quizizz

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/61d03f291d9e46001df1c887>

Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic

Aplicații recomandate: GeoGebra, Quizizz

Recomandare: Lecție de consolidare a cunoștințelor

Competențe generale și specifice:

CG 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

CS 2.7. Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente

CG 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

CS 3.7. Deducerea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic

CG 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

CS 5.7. Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic

Repere!

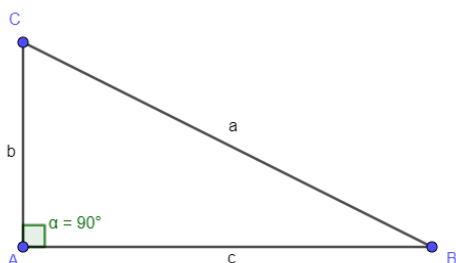
Definiții: Într-un triunghi dreptunghic, considerăm un unghi ascuțit și numim:

- **sinusul** lui = raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului și lungimea ipotenuzei;
- **cosinusul** lui = raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului și lungimea ipotenuzei;
- **tangenta** lui = raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului și lungimea catetei alăturate;
- **cotangenta** lui = raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului și lungimea catetei opuse.

Observație:

Sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta se numesc **funcții trigonometrice** și se notează cu *sin*, *cos*, *tg*, și *ctg*.

În triunghiul ABC avem:



$$\sin B = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$$

$$\sin C = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$$

$$\cos B = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{c}{b}$$

$$\cos C = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{ctg} C = \frac{b}{c}$$

Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile de 30°, 45° și 60°:

Teorema cosinusului

Într-un triunghi ABC au loc relațiile:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

	30°	45°	60°
$\sin u$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos u$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} u$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} u$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Pot să aplic!



Nivel 1

În triunghiul ABC dreptunghic în A , $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, atunci $\sin B = \dots$.



Nivel 2

Triunghiul dreptunghic ABC are ipotenuza $BC = 72$ cm și $\hat{B} = 30^\circ$. Lungimea catetei AC este de ... cm.

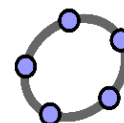


Nivel 3

1. Într-un triunghi dreptunghic de ipotenuza n și cu un unghi de 15° , înălțimea este egală cu
2. În trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, diagonala BD este bisectoarea unghiului ABC . Știind că $AB = 15$ cm și $\widehat{ABC} = 60^\circ$, lungimea laturii BC este de ... cm.

Aplicații recomandate!

Aplicația: **GeoGebra**



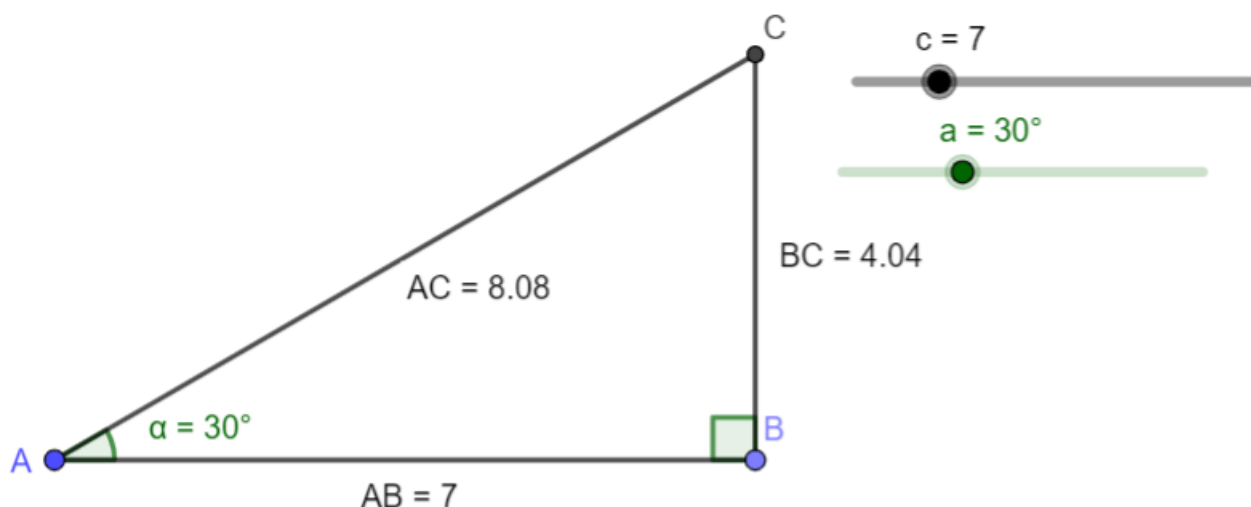
Rapoarte constante în triunghiul dreptunghic

$$\sin = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}}, \cos = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}}, \operatorname{tg} = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}}, \operatorname{ctg} = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}$$






Pregătiri:






- ✓ Deschideți un nou fișier **GeoGebra**;
- ✓ Deschidem **Meniul**, selectăm **Vizualizare**, apoi **Bloc Desen**.

Figură:



Pași:

1.		Cursor Se aleg două cursoare unul de tip întreg notat cu c , și unul de tip unghi notat cu a .
2.		Segment de lungime dată Se construiește segmentul AB de lungimea cursorului c .
3.		Unghi de mărime dată Se construiește unghiul BAB' de mărime a .
4.		Perpendiculară Se construiește perpendiculara în B pe AB .
5.		Semidreaptă Se construiește semidreapta AB' cu originea în A .

6.		Intersecție Se fixează intersecția dintre perpendiculara construită și semidreaptă și se notează cu C .
7.		Segment Se construiesc segmentele BC și AC .
8.		Arată/Ascunde obiecte Se ascund perpendiculara construită, semidreapta și punctul B' , pentru a evidenția triunghiul dreptunghic.
9.		Distanță sau lungime Se calculează lungimile segmentelor AB , AC , BC și se compară diferite rapoarte, mutând cursorul atât pentru lungimea catetei cât și pentru măsura unghiului.
10.		Salvare construcție.

Aplicația: [Quizizz](https://quizizz.com)

Quizizz

Link: <https://quizizz.com/admin/quiz/61d06b7b207f89001f2bb935>

<https://quizizz.com/admin/quiz/61d08e13268f66001d8e742f>

Digitaliada